

Radioaktivt henfald

(Mapledag DTU
d. 12/11-2025)

STEEN TOFT JØRGENSEN

EKSTERN LEKTOR, DTU COMPUTE

Min baggrund

39 år som gymnasielærer, datavejleder og Maple-kontakt,
Helsingør Gymnasium (matematik, fysik, datalogi, nv)

16+ år som klasselærer i matematik 1 ved DTU Compute

14 år som klasselærer i matematik ved Økonomisk Institut, KU

21 år som skr. censor STX og HF

12 år som redaktør på Infoguiden

12 år som redaktør på EMU, matematik

4 år som formand for Datalærerforeningen

Tidligere webmaster for uvmat.dk (Opgavehjørnet + Månedens Opgave mm.)

Webmaster for science-gym.dk

Kurser i dataopsamling for Fysiklærerforeningen

GeoGebra + Maple + Python

Baggrundsstråling

- Måledata fra min mobile geigertæller.
- Data hentes til PC via USB-kabel.
- Kan plotte poisson-fordelingen af måledata i Maple
- Kan beregne gennemsnit af antal henfald
- Undersøge: større eller mindre stråling dybt nede i jorden?
- Undersøge: er strålingen afhængig af hvor målingen foregår?
- Måle strålingsdosis på en flyrejse – security scanning og selve flyturen



Baggrundsstråling




<https://steen-toft.dk/fysik/geiger/> (se hvordan Maple anvendes i beregningerne)

Strålingen nede i LKAB-jernmalminen i Kiruna, Sverige er MINDRE end ved overfladen.

Tidsrummet: 11/1-2025.	Tidsrummet: 11/1-2025 til 14/1-2025.
<p>Baggrundsstråling (naturlig). Geigertælleren indstillet til: <i>beta+gamma stråling</i>. Intervaller mellem målingerne: <i>1 minut</i>. Antal målte data: <i>161</i>. Middelværdi: 13.3 henfald pr. 1 minut. Sted: LKAB jernmalminen i Kiruna, Sverige</p> <p>NB: Strålingen i LKAB-minen er mindre end i selve byen Kiruna!</p> <p>Dataene står i række 7 til 168.</p> <p>Excel-fil til download: data16.xlsx (0.1 MB) Så kan du lave dine egne beregninger!</p>	<p>Baggrundsstråling (naturlig). Geigertælleren indstillet til: <i>beta+gamma stråling</i>. Intervaller mellem målingerne: <i>1 minut</i>. Antal målte data: <i>3836</i>. Middelværdi: 16.4 henfald pr. 1 minut. Sted: Kiruna, Sverige</p> <p>NB: Strålingen i LKAB-minen er mindre end i selve byen Kiruna!</p> <p>Dataene står i række 7 til 3843.</p> <p>Excel-fil til download: data17.xlsx (0.1 MB) Så kan du lave dine egne beregninger!</p>
<p>Beregning på data og tegning i Maple 2024.2:</p> <p>henfald16.mw  eller henfald16.pdf </p>	<p>Beregning på data og tegning i Maple 2024.2:</p> <p>henfald17.mw  eller henfald17.pdf </p>

Baggrundsstråling

Strålingen i Visby på Gotland er STØRRE end hjemme i Danmark.

Tidsrummet: 16/1-2025 til 26/8-2025.	Tidsrummet: 26/8-2025 til 21-8-2025.
<p>Baggrundsstråling (naturlig). Geigertælleren indstillet til: <i>beta+gamma stråling</i>. Intervaller mellem målingerne: <i>10 minutter</i>. Antal målte data: <i>31923</i>. Middelværdi: <i>126</i> henfald pr. 10 minutter. Sted: Ålsgårde, Danmark</p> <p>Dataene står i række 8 til 31930.</p> <p>Excel-fil til download: data18.xlsx (1.7 MB) Så kan du lave dine egne beregninger!</p>	<p>Baggrundsstråling (naturlig). Geigertælleren indstillet til: <i>beta+gamma stråling</i>. Intervaller mellem målingerne: <i>10 minutter</i>. Antal målte data: <i>683</i>. Middelværdi: <i>197</i> henfald pr. 10 minutter. Sted: Visby, Gotland, Sverige</p> <p>NB: Strålingen i Visby er større end i Ålsgårde!</p> <p>Dataene står i række 7 til 690.</p> <p>Excel-fil til download: data19.xlsx (0.1 MB) Så kan du lave dine egne beregninger!</p>
<p>Beregning på data og tegning i Maple 2025.1:</p> <p>henfald18.mw  eller henfald18.pdf </p>	<p>Beregning på data og tegning i Maple 2025.1:</p> <p>henfald19.mw  eller henfald19.pdf </p>

Baggrundsstråling

Excel-filen "data17.xlsx" placeres i "Overførsler" ("Downloads") på Windows PC.

NB: ved download fra browsere, vil filen jo være i "Overførsler" ("Downloads")!

OBS: hvis filen ligger på Skrivebordet, ændres "Downloads" i koden nedenfor til "Desktop".

Import-metoden i næste linje sikrer, at man ikke igen og igen skal loade filen manuelt, når man kører med "!!!!".

$M := \text{Import}(\text{"Downloads/data17.xlsx"}, \text{base} = \text{homedir}, \text{output} = \text{Matrix}) :$

Hvor mange rækker er der i matricen med data?

$N := \text{RowDimension}(M) = 3848$

Dataene stammer fra GammaScout geigertæller.

Baggrundsstråling

"Puls Count" står i 6. søjle.

De første 6 linjer er tekst. Derfor skippes disse.

De sidste 6 linjer indeholder tekster, derfor skippes disse.

Derfor udvælges datene, og ændres til en liste:

$$L := M[8 .. N - 5, 6] :$$
$$L := \text{convert}(L, \text{list}) :$$

Hvor mange data er der så:

$$\text{numelems}(L) = 3836$$

Disse skal afbildes i et diagram, som viser fordelingen.

Hvad er mindste og største observation?

$$\min(L) = 4.0$$
$$\max(L) = 39.0$$

Baggrundsstråling

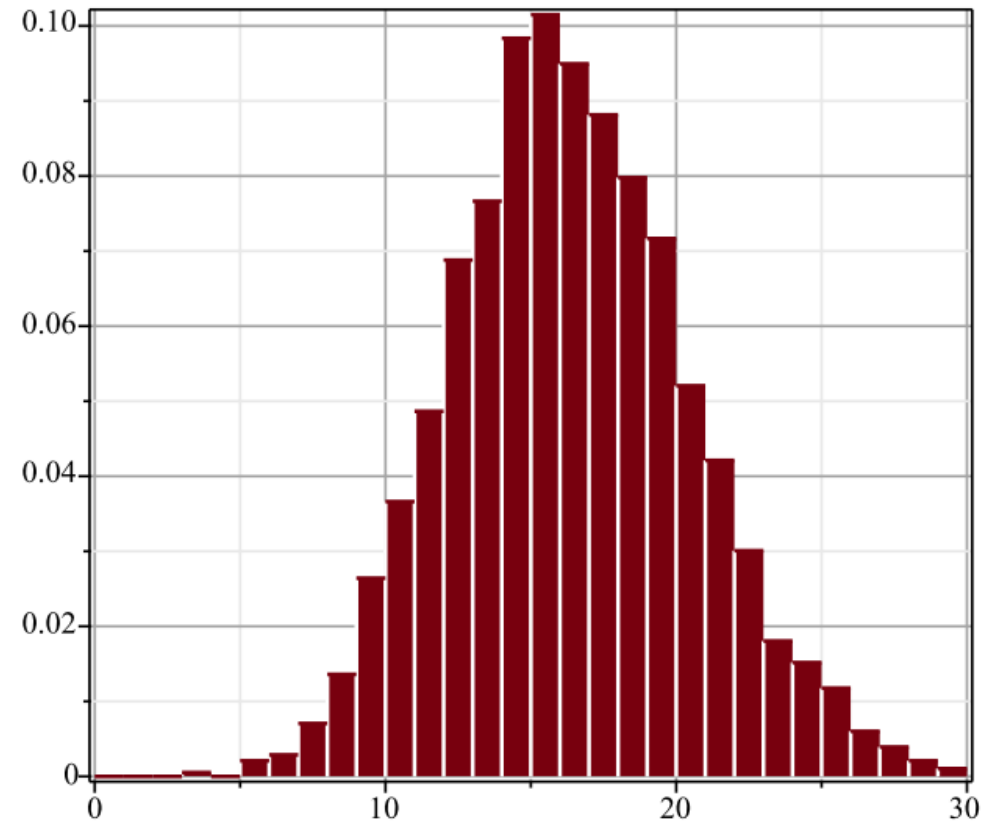
Histogram

$G := \text{grupperData}(L, [0..30], 30) :$

HISTOGRAM

Middelværdi = 16.4

Spredning = 4.1



Strålingsdosis ved flyrejse

<https://steen-toft.dk/fysik/flyrejse/> (se hvordan Maple anvendes i beregningerne)

Scanning af bagagen i security i lufthavnen giver en stor stråling.

De nye scannere i CPH giver MEGET større stråling end de gamle scannere!

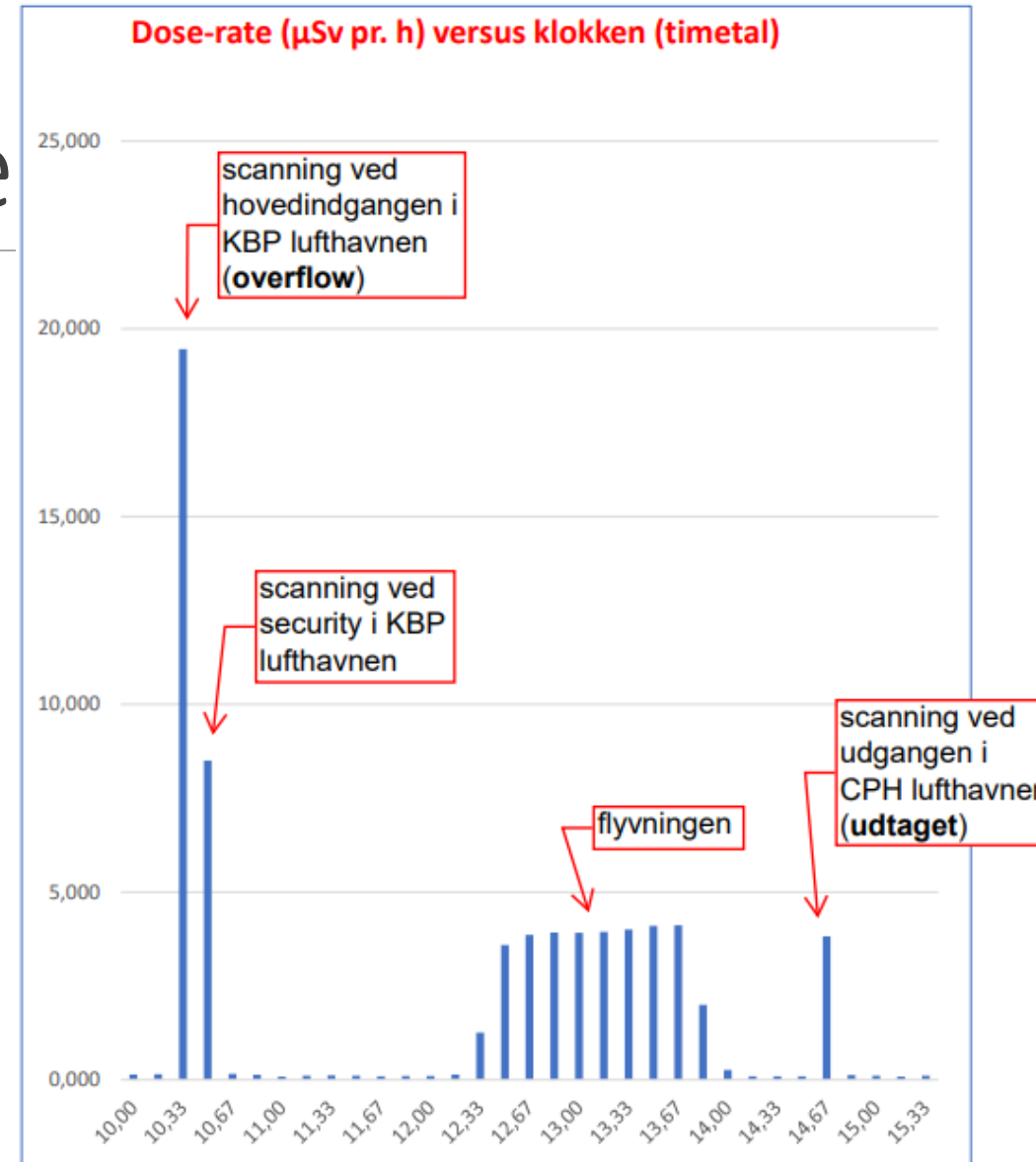
Når flyet kommer højt op i atmosfæren, så vil strålingen fra verdensrummet være større end ved jordoverfladen.

Strålingsdosis ved flyrejse

Hjemrejse med fly fra Kyiv, Ukraine i 2020:

Kuffert blev scannet 3 gange

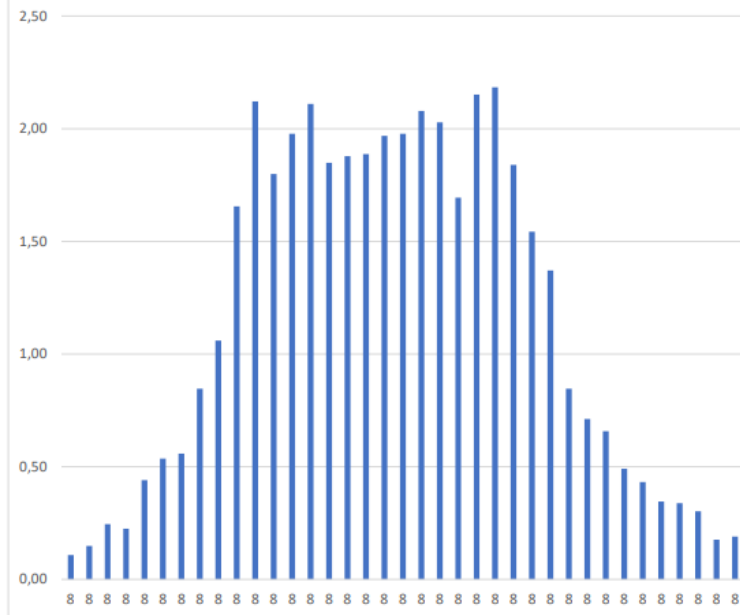
- Skulle proppe kufferten ind gennem en sluse ved indgangen til lufthavnen i Kyiv!
- Alm. security scanning i lufthavnen i Kyiv
- Udtaget til ekstra scannings kontrol i CPH (kom fra et ikke-Schengen land)



Strålingsdosis ved flyrejse

CPH-OSLO

Dose-rate ($\mu\text{Sv pr. h}$) versus klokken (timetal)

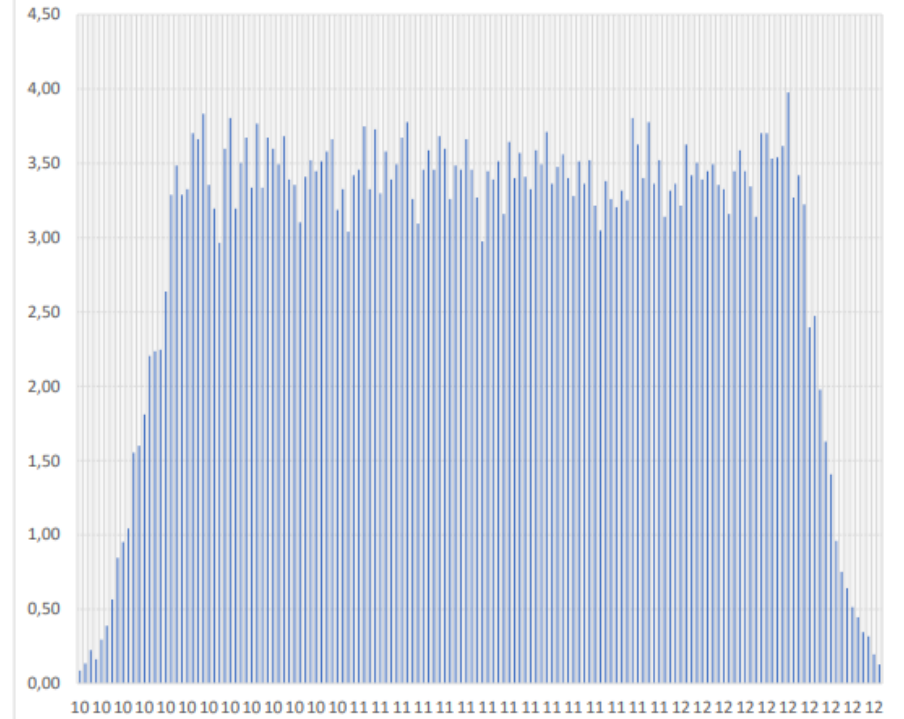


Flyvning foregik mellem kl. 07.30 til kl. 08.07
Geigertælleren lå i kufferten, som blev indchecket på flyet.

Dosis under flyvning: **0,7 μSv**

OSLO-LONGYEARBYEN

Dose-rate ($\mu\text{Sv pr. h}$) versus klokken (timetal)



Flyvning foregik mellem kl. 09.40 til kl. 12.10
Geigertælleren lå i kufferten, som blev indchecket på flyet.

Dosis under flyvning: **7,4 μSv**

Radioaktivt henfald

<https://steen-toft.dk/mat/radio/>

Model: radioaktivt henfald

Variable og formler:

N = antal endnu ikke henfaldne kerner (enhed: *stk*)

A = aktiviteten = antal henfald pr. tidsenhed (enhed: *Becquerel* = Bq = *stk. pr. sekund* = s^{-1})

k = sønderdelingskonstanten (enhed: s^{-1})

$T_{\frac{1}{2}}$ = halveringstiden (enhed: s)

$$A = - \frac{dN}{dt}$$

(formlen følger direkte af definitionerne af A og N)

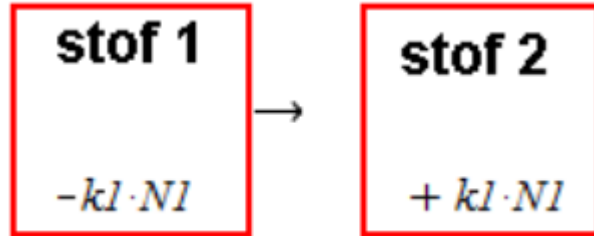
$$A = k \cdot N$$

(formlen siger, at aktiviteten A er proportional med antal ikke henfaldne kerner N , hvilket er meget *fornuftig antagelse*: dobbelt så stor radioaktiv klump giver dobbelt så stor stråling)

$$k = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}$$

Radioaktivt henfald

<https://steen-toft.dk/mat/radio/maple/henfald.pdf>



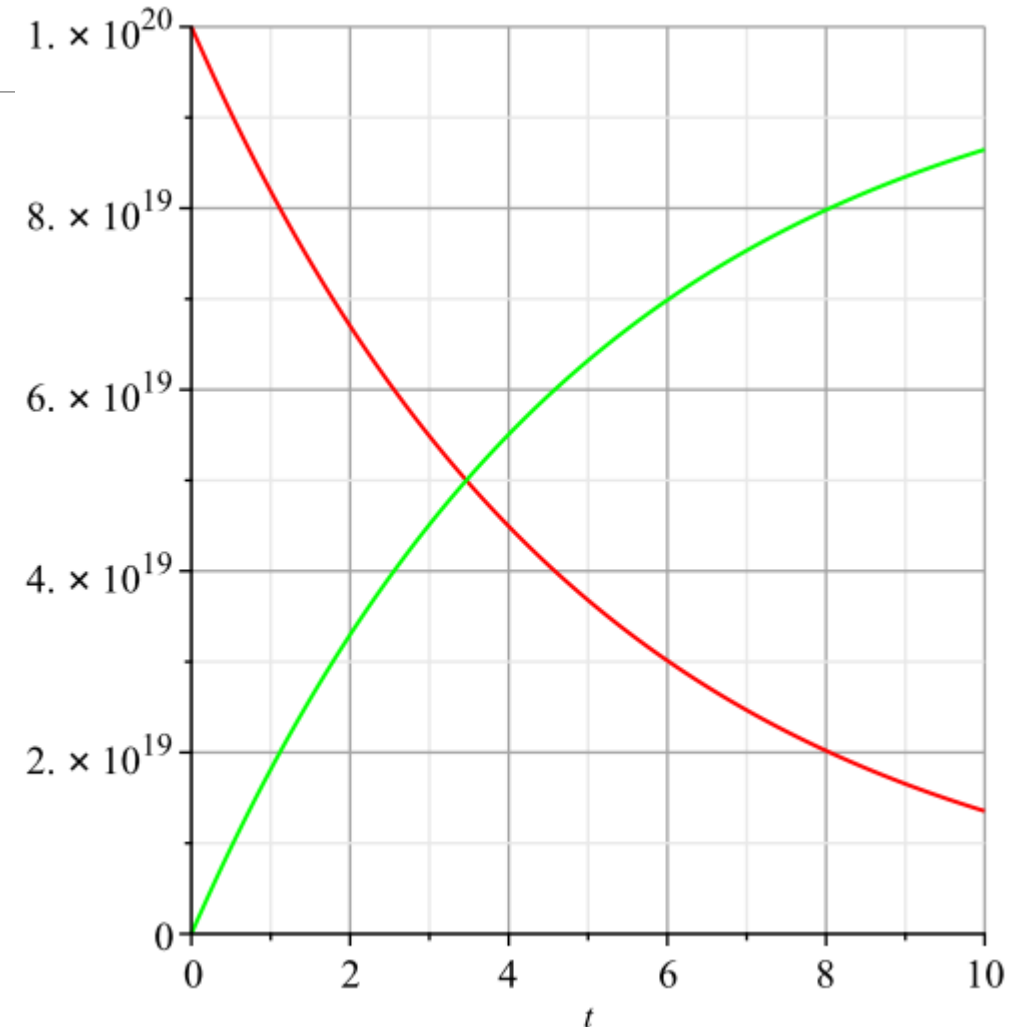
Differentiallignings-model:

Differentialligninger:

$$\frac{dNI}{dt} = -kI \cdot NI$$

Betingelser:

$$NI(0) = NI_0$$



Henfald med datterhenfald

<https://steen-toft.dk/mat/radio/maple/equi.pdf>

Radionuclide and Decay Product Half-Lives Are Similar

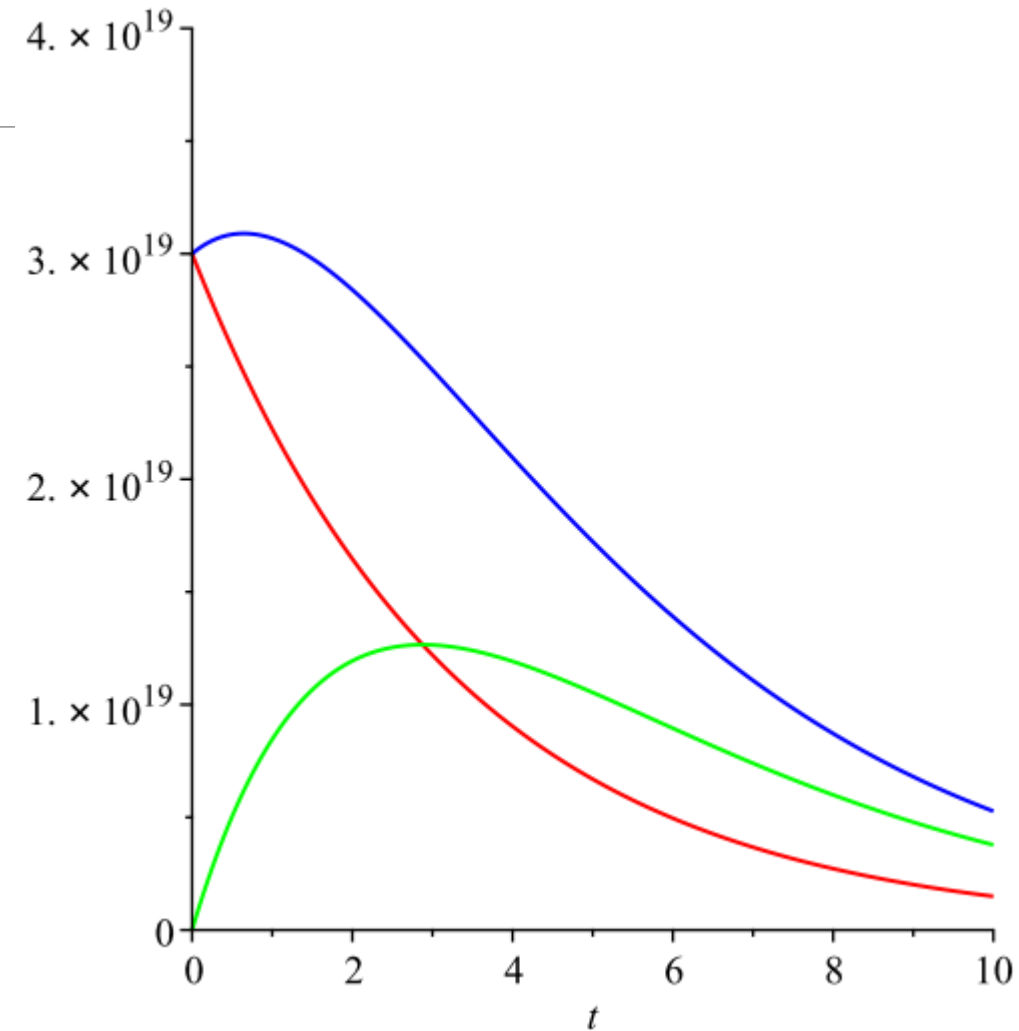
⌈ Når halveringskonstanterne næsten er ens, så er sønderdelingskonstanterne k også næsten ens.

> $k1 := 0.3; k2 := 0.4$

Aktiviteterne plottes:

A1 er **rød**, A2 er **grøn**, A1+A2 er **blå**

$$A1 := k1 N10 e^{-k1 t} \qquad A2 := k2 \left(\frac{N10 k1 e^{-k2 t}}{k1 - k2} - \frac{k1 e^{-k1 t} N10}{k1 - k2} \right)$$



Henfald med datterhenfald

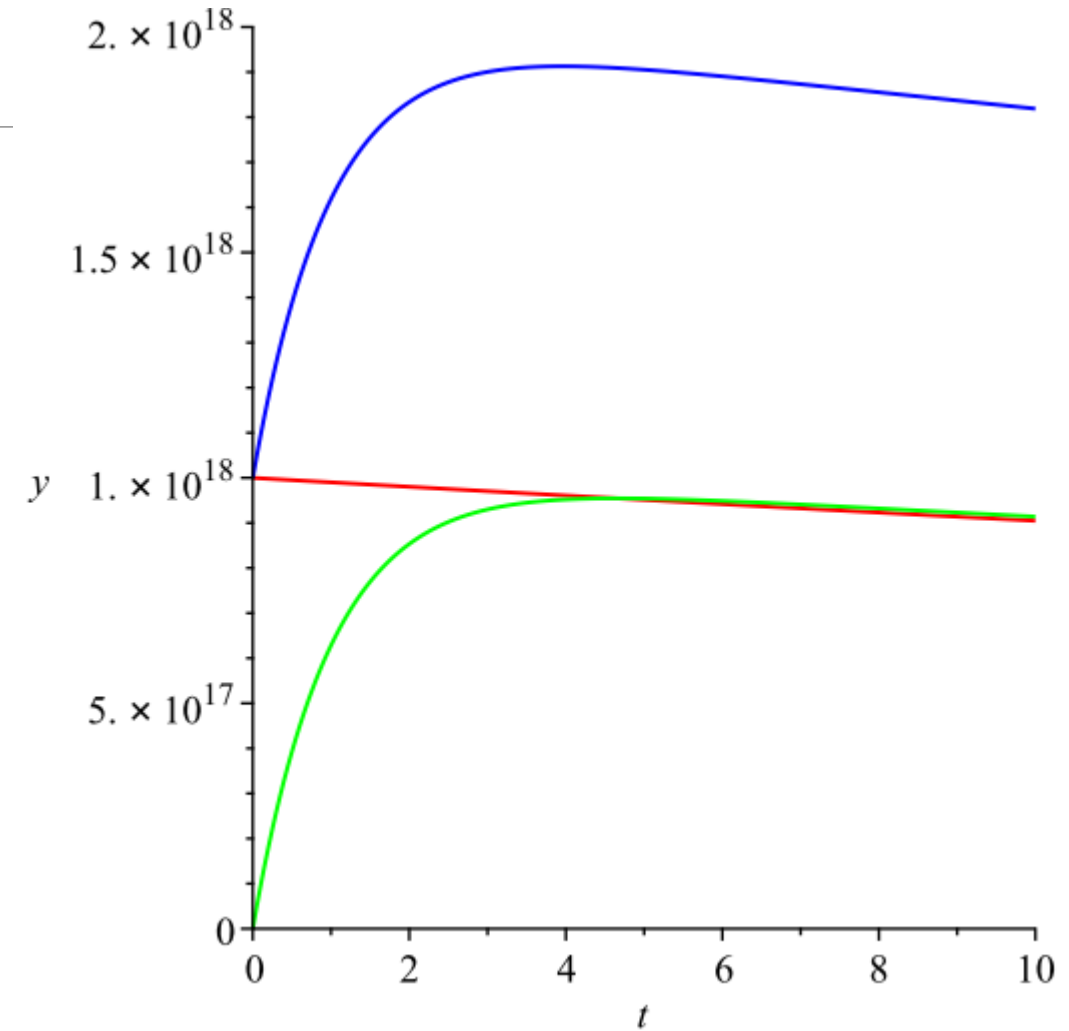
Radionuclide Has a Much Longer Half-Life

Når halveringskonstanterne for stof 1 er meget større end for stof 2, så er sønderdelingskonstanten for stof 1 meget mindre end for stof 2.

> $k_1 := 0.01; k_2 := 1$

Aktiviteterne plottes:

A1 er **rød**, A2 er **grøn**, A1+A2 er **blå**



Henfald med datterhenfald

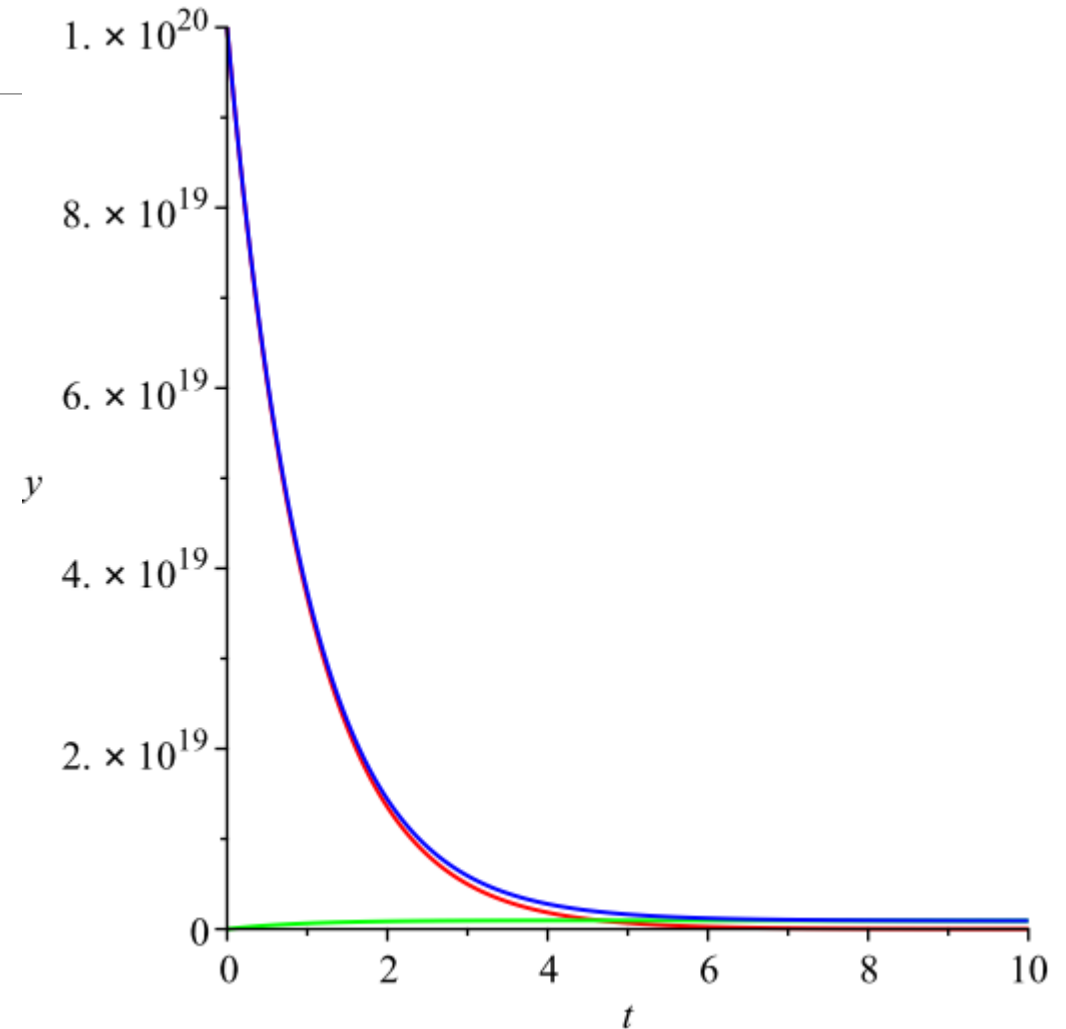
Decay Product Has a Longer Half-Life

Når halveringskonstanterne for stof 2 er meget større end for stof 1, så er sønderdelingskonstanten for stof 2 meget mindre end for stof 1.

> $k_1 := 1; k_2 := 0.01$

Aktiviteterne plottes:

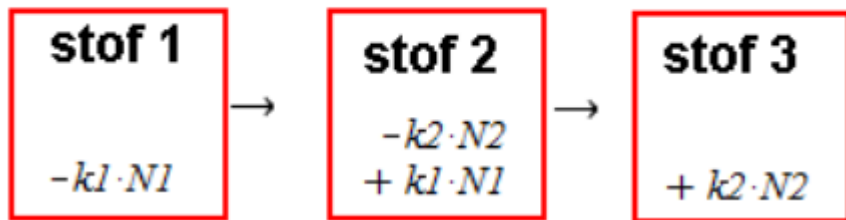
A1 er **rød**, A2 er **grøn**, A1+A2 er **blå**



Radioaktivt henfald

Stof1 er radioaktivt, og henfalder til **stof2**.

Stof2 er selv radioaktivt, og henfalder til **stof3**, som er stabilt.



Differentiallignings-model:

Differentialligninger:

$$\frac{dN1}{dt} = -k1 \cdot N1$$

$$\frac{dN2}{dt} = k1 \cdot N1 - k2 \cdot N2$$

$$\frac{dN3}{dt} = k2 \cdot N2$$

Betingelser:

$$N1(0) = N10$$

$$N2(0) = 0$$

$$N3(0) = 0$$

Trin 1:

$$\frac{dN1}{dt} = -k1 \cdot N1$$

Er af **1. standardtype**: $y' = k \cdot y \Leftrightarrow y = c \cdot e^{k \cdot x}$

Trin 2:

$$\frac{dN2}{dt} = k1 \cdot N1 - k2 \cdot N2$$

lyder så: $\frac{dN2}{dt} = k1 \cdot c1 \cdot e^{-k1 \cdot t} - k2 \cdot N2$

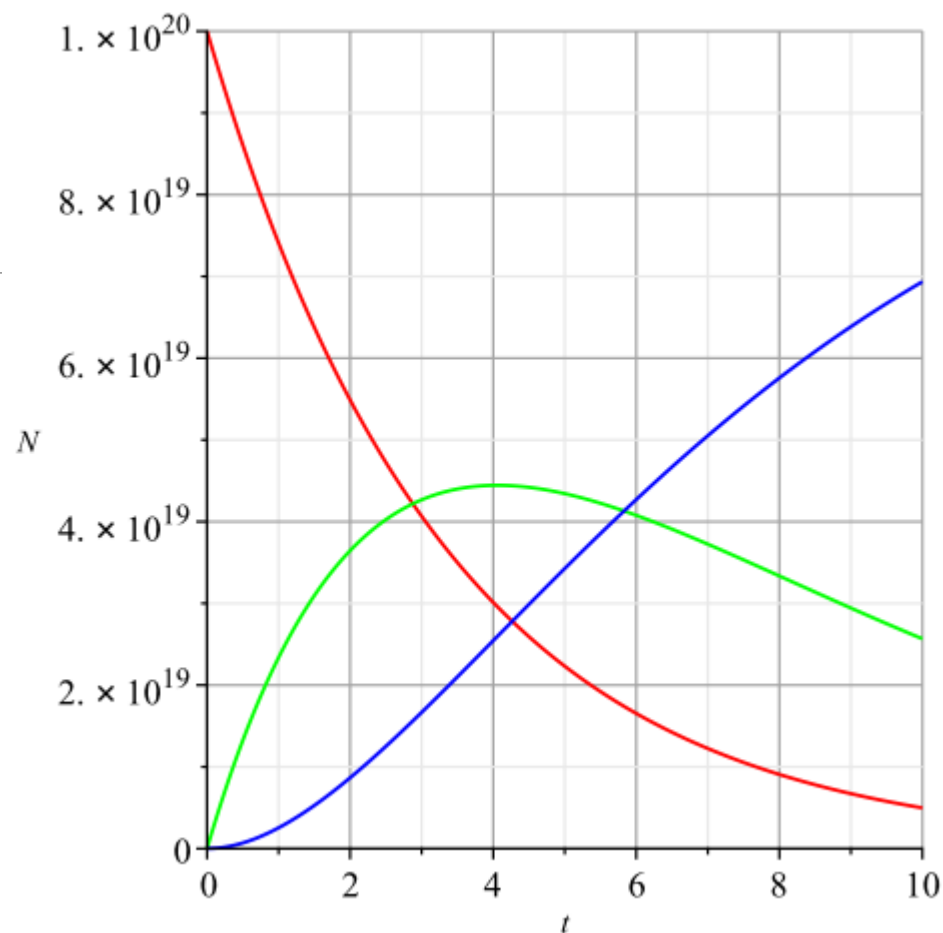
Denne er en **lineær type**: $y' = -a(x) \cdot y + b(x)$

Trin 3:

$$\frac{dN3}{dt} = k2 \cdot N2$$

lyder så: $\frac{dN3}{dt} = k2 \cdot (c3 \cdot e^{-k1 \cdot t} + c2 \cdot e^{-k2 \cdot t})$

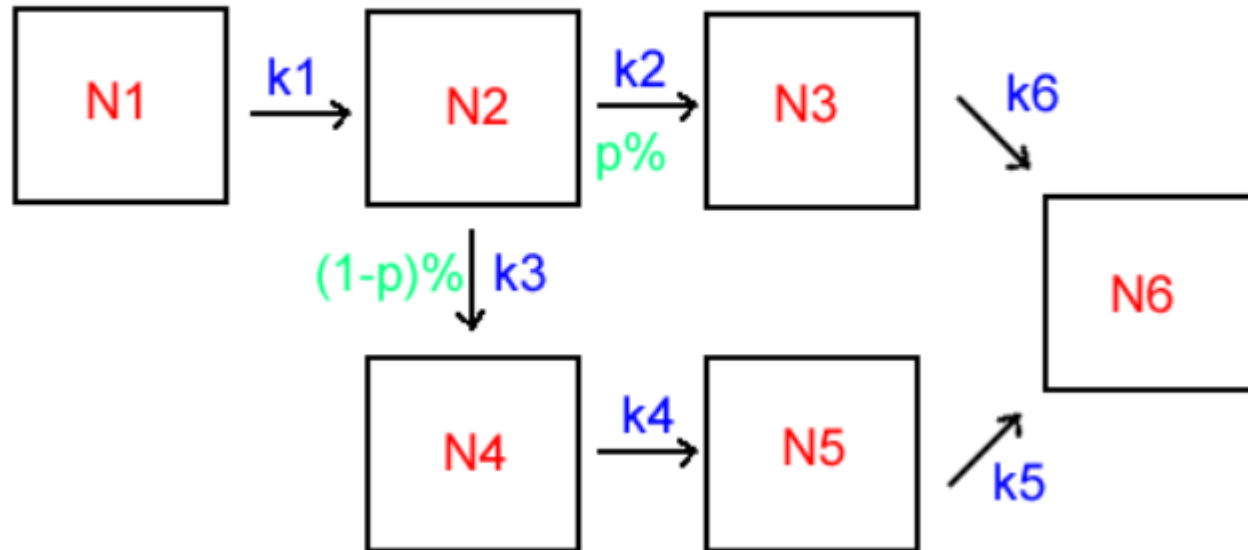
Denne differentialligning **løses simpelt ved integration!**



Henfaldskæde

<https://steen-toft.dk/mat/radio/maple/kaede.pdf>

Differentiallignings-model:



Differentialligningssystemet:

$$\frac{dN_1}{dt} = -k_1 \cdot N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = k_1 \cdot N_1 - k_2 \cdot p \cdot N_2 - k_3 \cdot (1-p) \cdot N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = k_2 \cdot p \cdot N_2 - k_6 \cdot N_3$$

$$\frac{dN_4}{dt} = k_3 \cdot (1-p) \cdot N_2 - k_4 \cdot N_4$$

$$\frac{dN_5}{dt} = k_4 \cdot N_4 - k_5 \cdot N_5$$

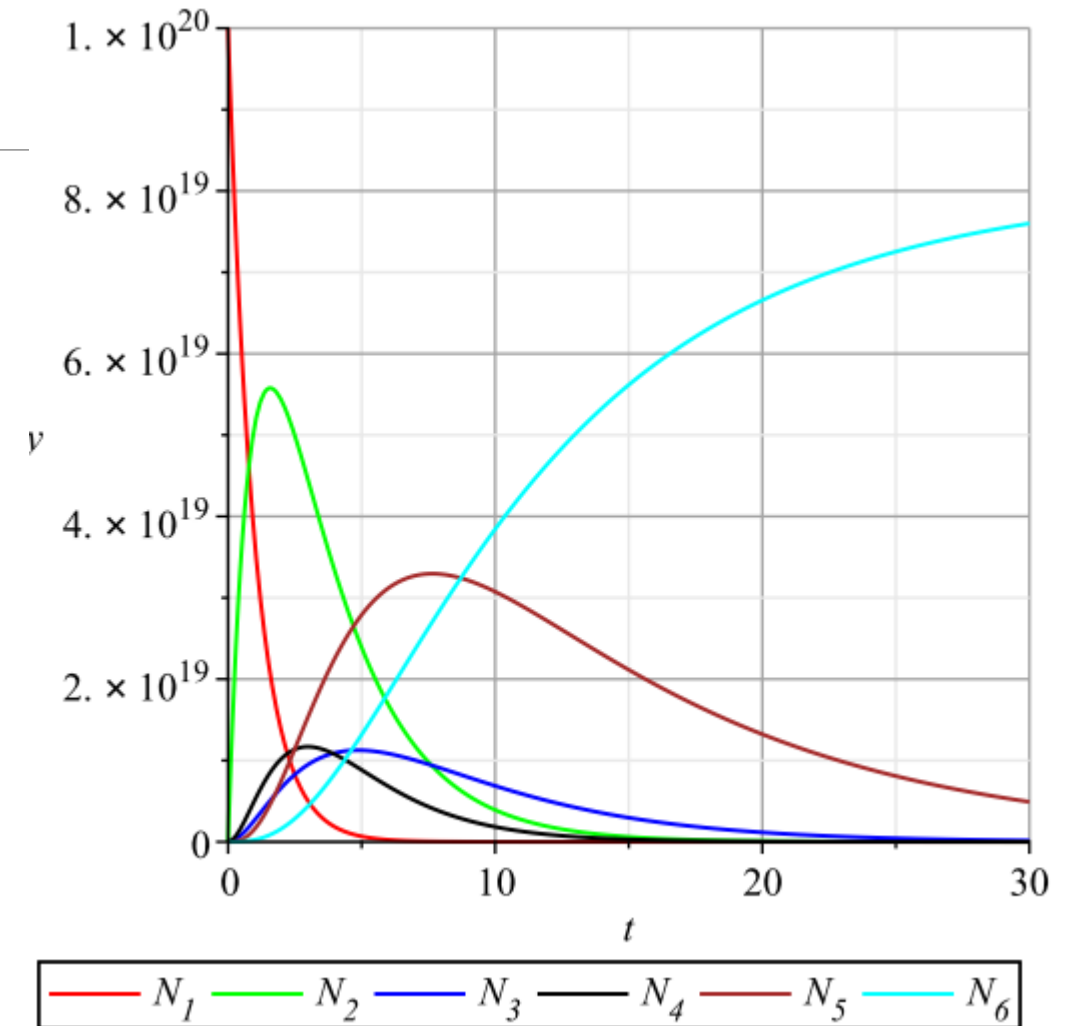
$$\frac{dN_6}{dt} = k_5 \cdot N_5 + k_6 \cdot N_3$$

Henfaldskæde

Differentialligningssystemet på matrix-form:

$$\begin{bmatrix} N_1'(t) \\ N_2'(t) \\ N_3'(t) \\ N_4'(t) \\ N_5'(t) \\ N_6'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 \cdot p + k_3 \cdot (1-p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 \cdot p & -k_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 \cdot (1-p) & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & +k_6 & 0 & k_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ N_4(t) \\ N_5(t) \\ N_6(t) \end{bmatrix}$$

NB: Da koefficient-matricen er en nedre trekantsmatrix, kan differentialligningssystemet løses successivt!



Thorium-henfaldskæden

<https://steen-toft.dk/mat/radio/maple/th-kaede.pdf>

```
> with(ScientificConstants) :
```

De 12 indgående grundstoffer defineres:

```
> GS := [Th[232], Ra[228], Ac[228], Th[228], Ra[224], Rn[220], Po[216], Pb[212],  
         Bi[212], Tl[208], Po[212], Pb[208]]
```

```
GS := [Th232, Ra228, Ac228, Th228, Ra224, Rn220, Po216, Pb212, Bi212, Tl208, Po212, Pb208]
```

Halveringstiderne hentes, og henfaldskonstanterne beregnes:

```
> T := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] :
```

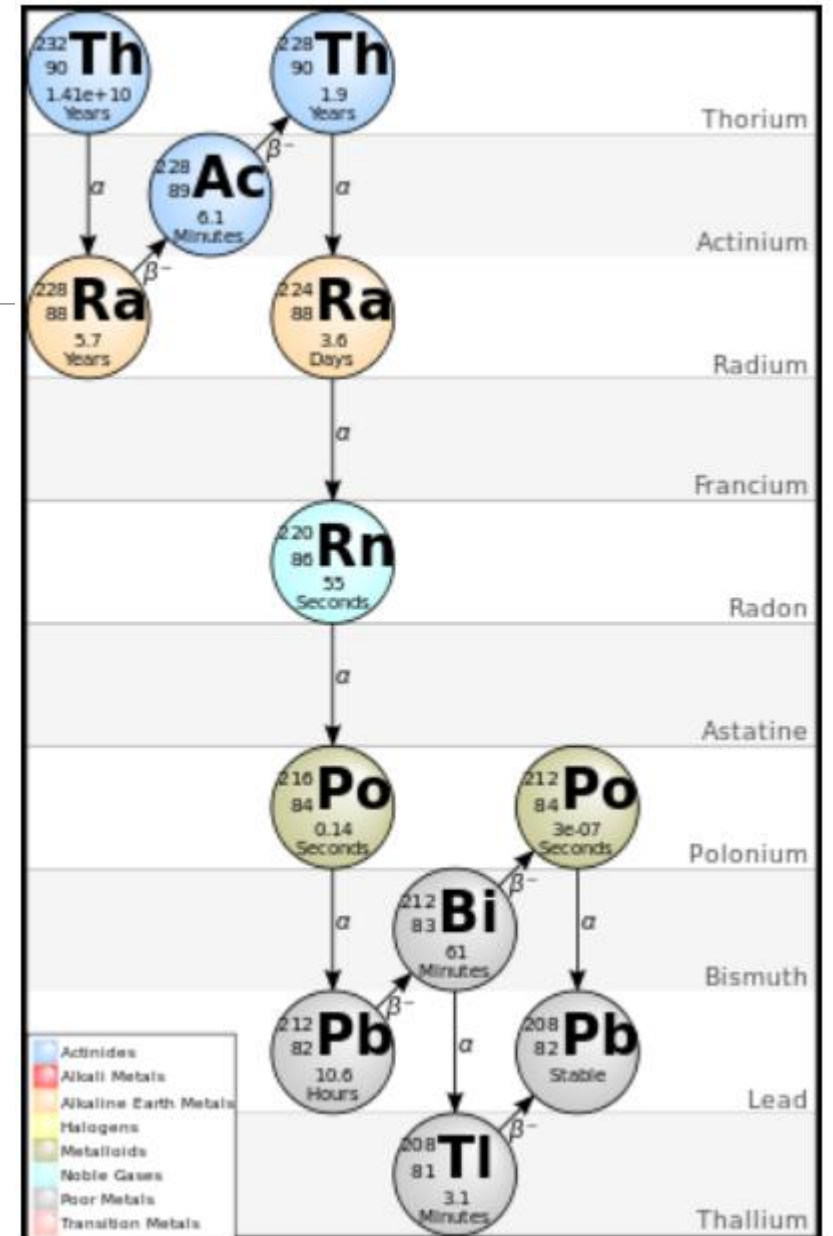
```
> k := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] :
```

```
> for i from 1 to 11 do
```

```
    T[i] := evalf(Element(GS[i], halflife));
```

```
    k[i] := evalf( $\frac{\ln(2)}{\%}$ )
```

```
end;
```



Thorium-henfaldskæden

Henfald for Bi_{212} er: 64.06% for β^- (giver Po_{212}) og 35.94% for α (giver Tl_{208}).

> $pPo := 0.6406$

$$pPo := 0.6406$$

> $pTl := 1 - pPo$

$$pTl := 0.3594$$

Thorium-henfaldskæden

Liste med differentialligningerne:

> $DL := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$;

1. led:

> $GS[1]; DL[1] := \frac{d}{dt} N[1](t) = -k[1] \cdot N[1](t)$

2. - 8. led:

> for i from 2 to 8 do

$$GS[i]; DL[i] := \frac{d}{dt} N[i](t) = +k[i-1] \cdot N[i-1](t) - k[i] \cdot N[i](t)$$

9. led Bi_{212} har 2 mulige henfald:

> $GS[9]; DL[9] := \frac{d}{dt} N[9](t) = +k[8] \cdot N[8](t) - k[9] \cdot N[9](t)$

10. led Tl_{208} :

> $GS[10]; DL[10] := \frac{d}{dt} N[10](t) = +p_{Tl} \cdot k[9] \cdot N[9](t) - k[10] \cdot N[10](t)$

11. led Po_{212} :

> $GS[11]; DL[11] := \frac{d}{dt} N[11](t) = +p_{Po} \cdot k[9] \cdot N[9](t) - k[11] \cdot N[11](t)$

12. led Pb_{208} :

> $GS[12]; DL[12] := \frac{d}{dt} N[12](t) = +k[11] \cdot N[11](t)$

Liste med betingelserne:

> $BT := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$;

> $BT[1] := N[1](0) = 10^{20}$;

> for i from 2 to 12 do
 $BT[i] := N[i](0) = 0$
end:

Løkken sker følgende:

- Hver differentialligning løses med sin egen bibetingelse.
- Løsningen gemmes i en funktion.

> for i from 1 to 12 do
 $dsolve(\{DL[i], BT[i]\}, \{N[i](t)\})$;
 $N[i] := unapply(rhs(\%), t)$;
end:

Thorium-henfaldskæden

Den samlede aktivitet beregnes (sum over de radioaktive 11 grundstoffer):

$$\text{> } A := \text{unapply} \left(\sum_{j=1}^{11} k[j] \cdot N[j](t), t \right)$$

$$\begin{aligned} A := t \rightarrow & 2.500682993 \cdot 10^{-8} e^{-\frac{463643599}{200} t} - 7.666828832 \cdot 10^{-9} e^{-\frac{472995947}{125000000000} t} \\ & - 8.989904110 \cdot 10^{-8} e^{-\frac{476979893}{250000000000} t} + 0.00002205576777 e^{-\frac{180959477}{1000000000000} t} \\ & - 9.542407609 \cdot 10^{-9} e^{-\frac{4780325383}{1000000000} t} + 1.619957840 \cdot 10^{-8} e^{-\frac{1246667591}{100000000000} t} \\ & - 0.009955618213 e^{-\frac{2191949949}{100000000000000} t} + 548.2975568 e^{-\frac{229674687}{2000000000000000} t} \\ & + 0.01906967306 e^{-\frac{3130746073}{100000000000000} t} - 1955.315986 e^{-\frac{3819996243}{10000000000000000} t} \\ & + 1563.343659 e^{-\frac{781671829}{50000000000000000000000000} t} \end{aligned}$$