

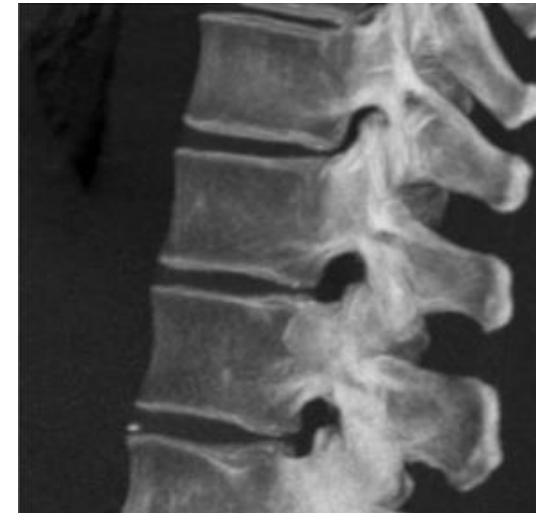
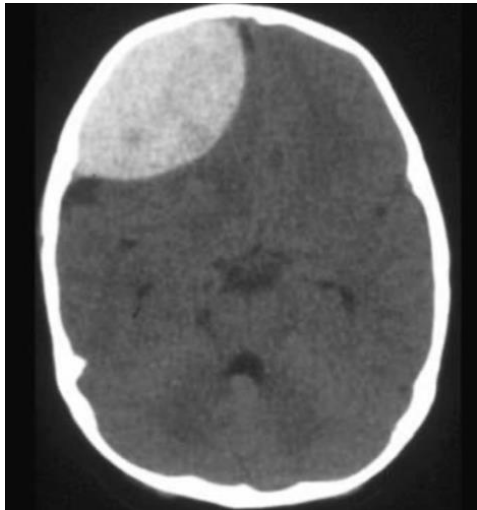
Radon-transformationer

(Mapledag DTU d. 12/11-2025)

Af

Steen Toft Jørgensen

ekstern lektor, DTU Compute



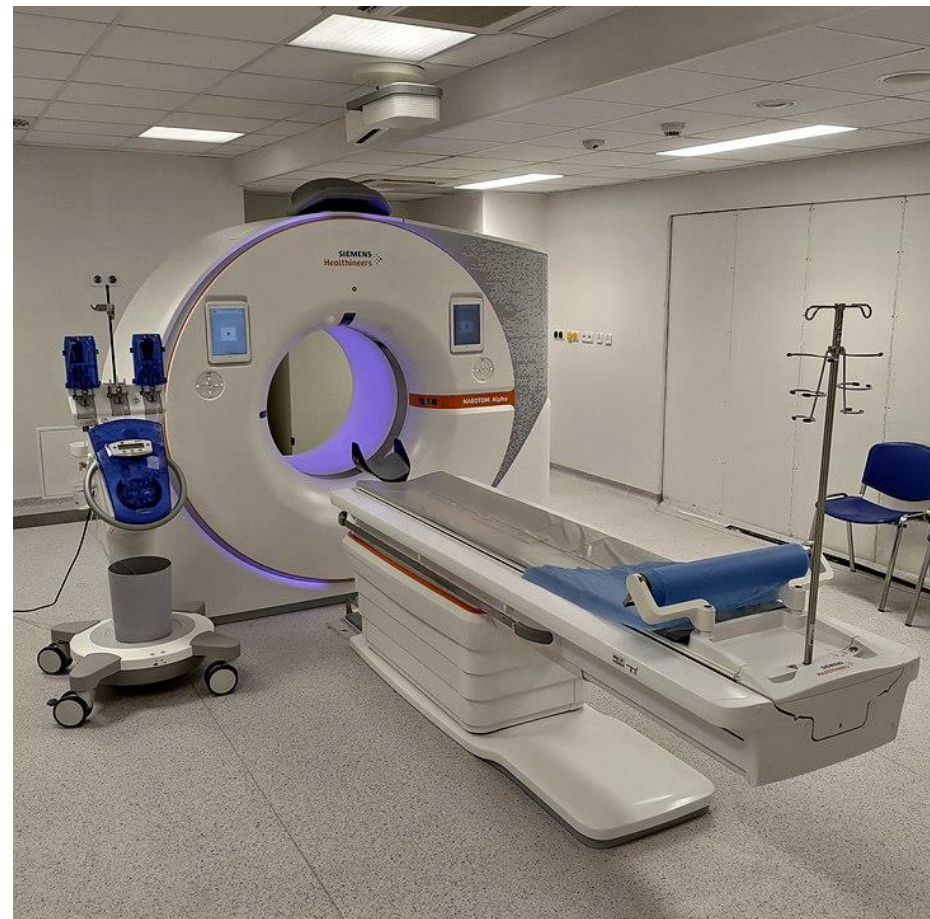
CT-scanner

CT står for "computer tomografi" (laver billeder, som viser tværsnit – uden at skære folk i stykker!).

Apparatet anvendes på hospitaler til at undersøge mennesker for knoglebrud, kræftknuder, blodprop, hjerneblødning mm.

Forskelligt væv har forskellig densitet, derfor kan man se detaljer. Man kan evt. drikke eller få injiceret kontrastvæske, så det fremtræder tydeligere på skærmen.

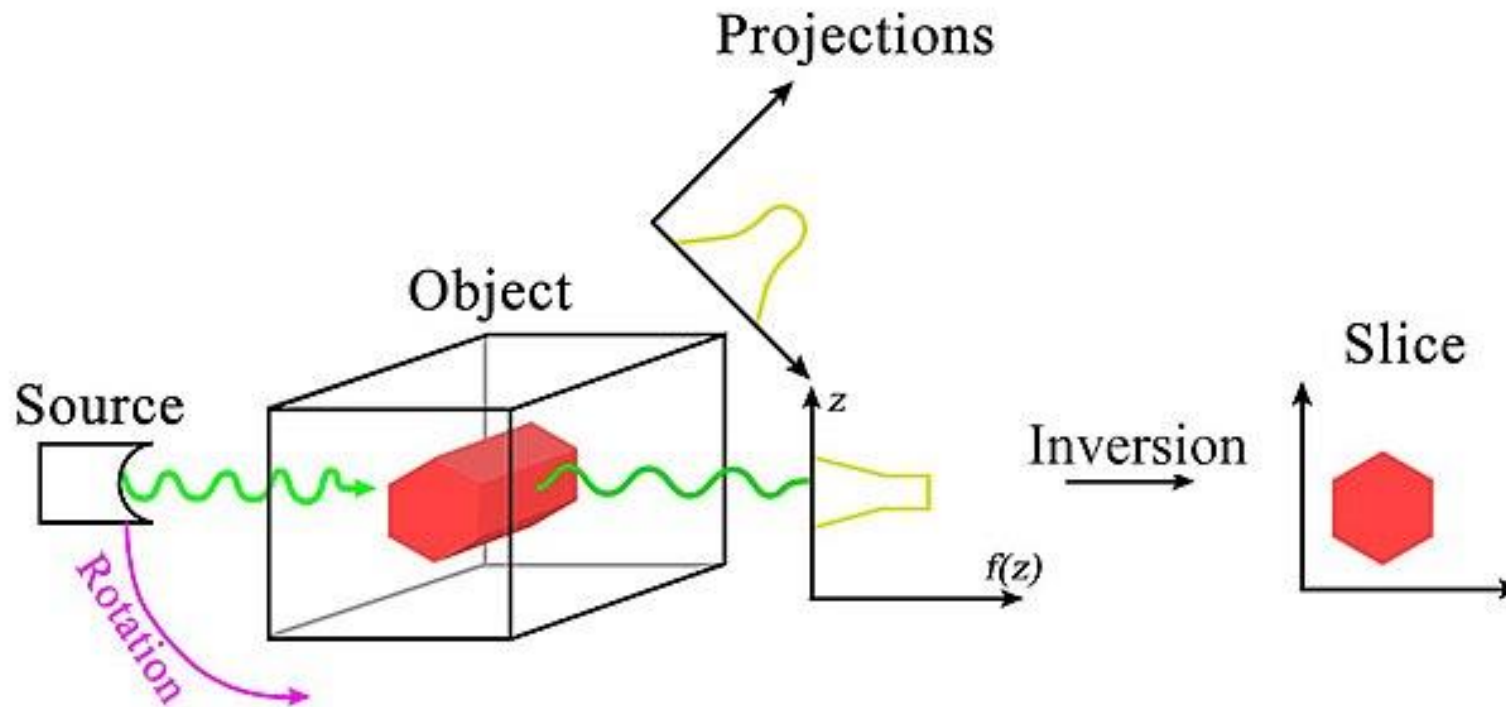
I Danmark fandtes i 2023 ca. 230 CT-scannere.



CT-scanning

En Røntgenstråle sendes ind imod et objekt, og responsen registreres.
Røntgenstrålen roterer om objektet.

Ud fra responsen udføres beregninger, som regner tilbage til objektets form.



CT-scanning

- I foråret 2024 og 2025 var jeg vejleder på et projekt på Mat1b om CT-scanning.
- Efterfølgende har jeg arbejdet med hvilke resultater, der registreres. Det hedder **Radon-transformationen** af objektet. Ud fra Radon-transformationen kan man plotte et såkaldt **sinogram**.
- Selv med simple objekter er det svært at beregne Radon-transformationen! Simple objekter (cirkel, firkant, ring), hvor 'højden' er 1 ellers 0. Så tænk på hvor indviklet det er mht. en menneskekrop med 'flydende' overgange mellem mange vævstyper.
- *Hele beregningen fra Radon-transformationen tilbage til objektet går jeg ikke ind på!*

Forklarende videoer

- Den finske matematikprofessor **Samuli Siltanen** har en stribe YouTube-videoer, som forklarer brugen af CT-scanning populært.
- Video nr. 101 (start) [5 min 32 sek]:
<https://www.youtube.com/watch?v=7pdRq4XLT90>
- Video nr. 104 (sinogram) [4 min 40 sek]:
<https://www.youtube.com/watch?v=bQewSa5ITiQ>
- Github: https://github.com/ssiltane/ProfSam_Tomo100
- Professor Sam's YouTube videoer:
https://www.youtube.com/@professor_sam/videos
- Samui Siltanens hjemmeside:
<https://siltanen-research.net/>

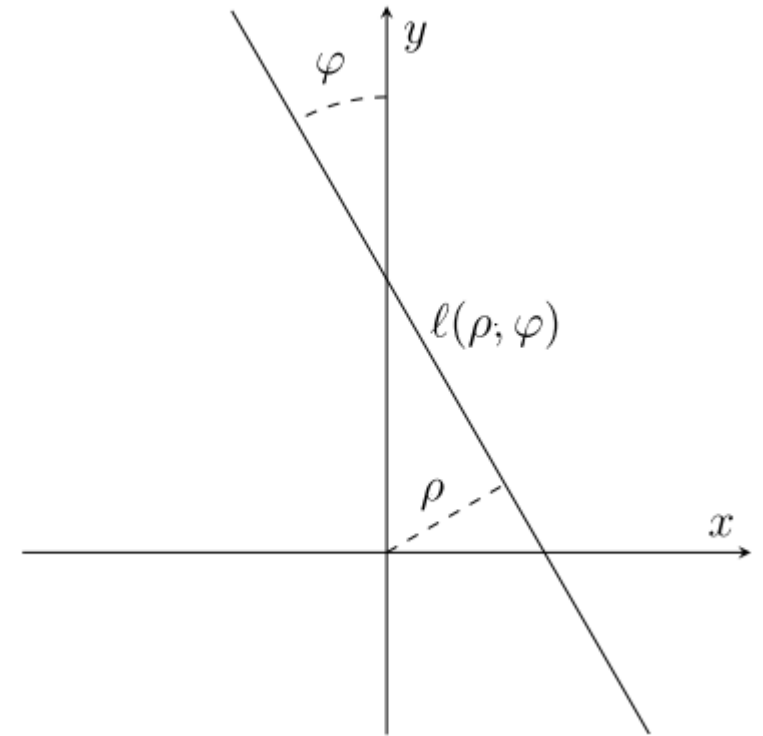


Strålelinjen

- Røntgenstrålingen udsendes i en ret linje, går igennem et objekt, og registreres på måler.
- Der indlægges et koordinatsystem i 2D.
- Den rette linje defineres ved 2 parametre:
 - Linjens vinkel φ med y-aksens positive retning
 - Linjens mindsteafstand ρ fra origo
- $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ i den stiplede retning er normalvektor til linjen. Tværvektoren $(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ er en retningsvektor til linjen.

Ligningen for linjen lyder: $x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) = \rho$

Parametriseringen for linjen lyder: $x = \rho \cdot \cos(\varphi) - t \cdot \sin(\varphi)$ og $y = \rho \cdot \sin(\varphi) + t \cdot \cos(\varphi)$



Objekter

- Objekterne har kompakt støtte, dvs. er 0 udenfor en kompakt mængde. Objekterne har densiteten 1.
Det svarer til en funktion f , som er 1 på objektet, og 0 udenfor en kompakt mængde.
- Objekter, som jeg regner på:
cirkelskive, ringskive, massiv firkant, 2 cirkelskiver etc.
- Objektet placeres symmetrisk om origo.

Radon-transformationen

- Radon-transformationen er opkaldt efter den østrigske matematiker Johann Karl August Radon, som indførte udtrykket i 1917.
- Radon-transformationen beregnes ved et linjeintegral:

$$Rf(\rho, \varphi) = \int_{\ell(\rho, \varphi)} f(x, y) ds.$$

- Da f har kompakt støtte, så nøjes man med at integrere over støtten, så man slipper for at integrere fra $-\infty$ til ∞ .
- Når f kun har værdien 0 eller 1, så gælder det om at bestemme længden af linjestykket, hvor linjen rammer objektet.

Radon-transformationenen

- Definition: i linjeintegralet $Rf(\rho, \varphi) = \int_{\ell(\rho, \varphi)} f(x, y) ds$.

substitueres parametriseringen af x og y

$$x = \rho \cdot \cos(\varphi) - t \cdot \sin(\varphi) \text{ og } y = \rho \cdot \sin(\varphi) + t \cdot \cos(\varphi)$$

- Hermed får man følgende definition:

Definition af den radon transformerede af f :

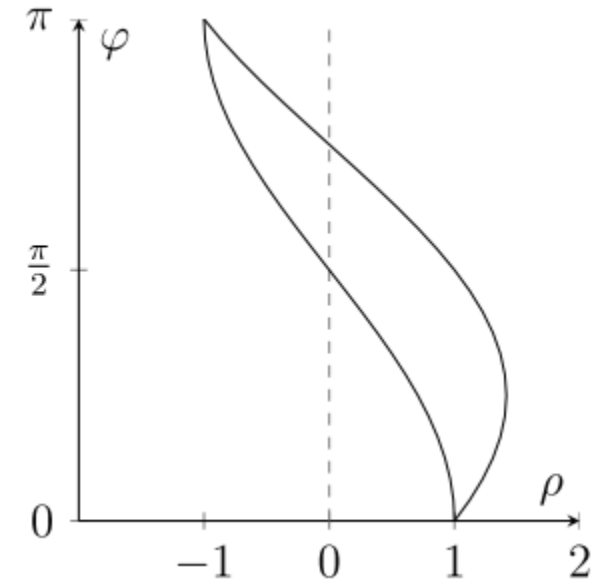
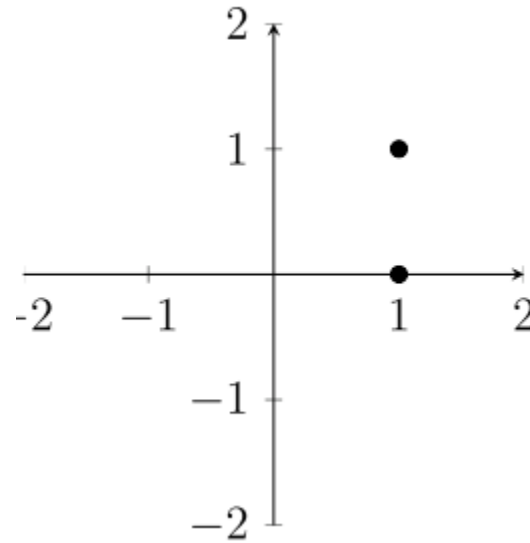
$$\text{radon}(\rho, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho \cdot \cos(\varphi) - t \cdot \sin(\varphi), \rho \cdot \sin(\varphi) + t \cdot \cos(\varphi)) dt :$$

- I praksis integrerer man ikke fra $-\infty$ til $+\infty$, men kun over linjestykket, hvor f ikke er 0.

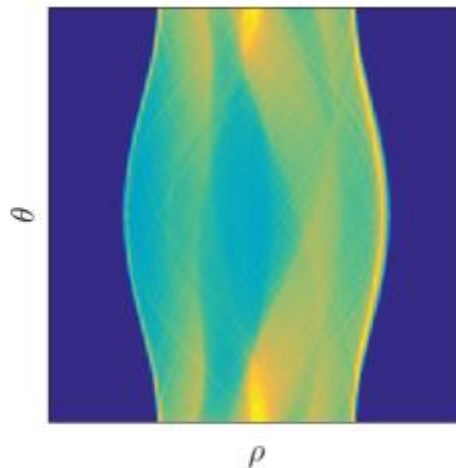
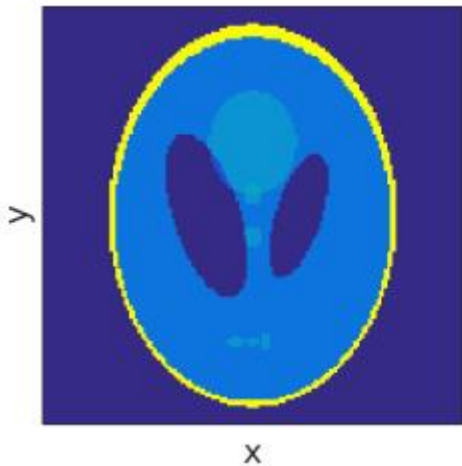
Sinogram

2D-plot i (ρ, φ) koordinatsystemet

Radon-transformerede af et punkt giver en sinus-kuve. Deraf navnet **sinogram**.



Til venstre ser vi to punkter, og til højre ser vi de tilsvarende Radon-transformationer (en linjeintegral gennem et af de to punkter evalueres til 1).

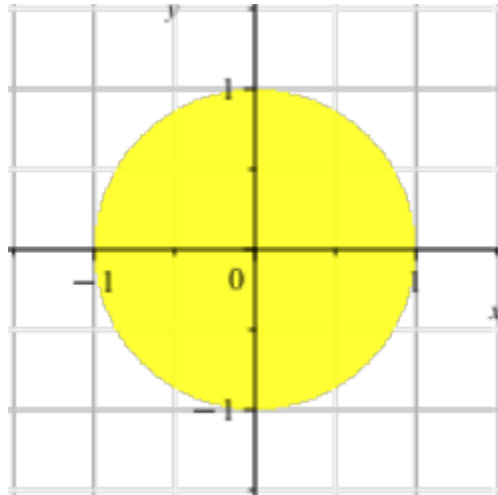


Shepp-Logan fantom og tilsvarende sinogram

Matematik og Maple metoder

- **I dette foredrag vil man stifte bekendtskab med disse metoder:**
 - Geometriske betragtninger i matematik, 2D og 3D
 - Plotning af **sinogram** i Maple
 - Kommandoen **assuming** i Maple
 - Opstilling af **procedure** i Maple
 - **Numerisk integration** i Maple
 - **Generaliseret formel** vedr. Radon-transformation for en vilkårlig cirkel
 - Brug af generelle formler, når figuren flyttes

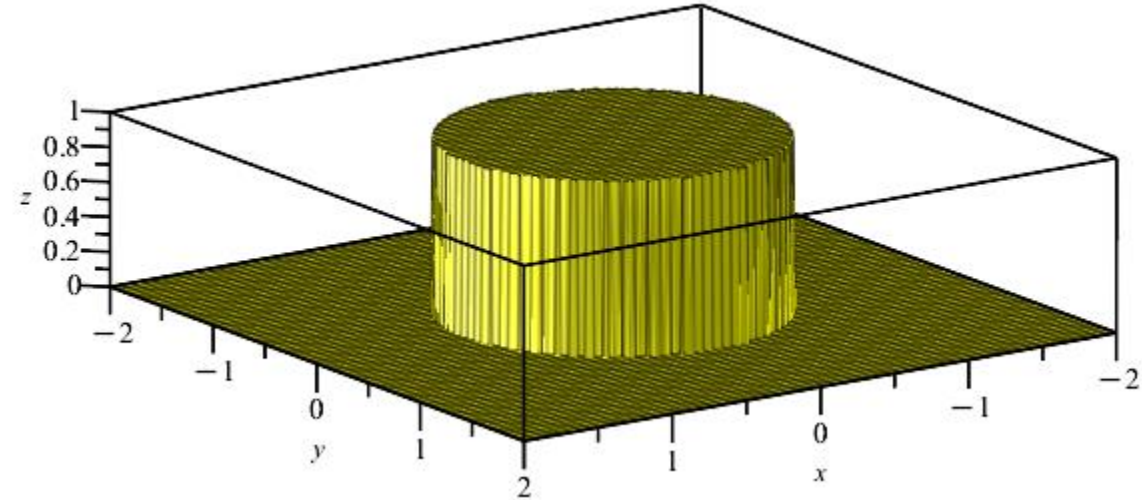
En cirkel



$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Den radon transformerede af f er:

$$Rf(\rho, \varphi) = \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{1 - \rho^2} & |\rho| < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Hvis $|\rho| > 1$, så rammer linjen slet ikke området, hvor f er 1. f er simpelthen 0 på hele linjen. Derfor er den radon transformerede 0.

Behøver så kun udregne resultatet når $-1 \leq \rho \leq 1$.

Pga. rotations symmetri, så er den radon transformerede **uafhængig** af vinklen φ .

Behøver så kun udregne resultatet når $\varphi = 0$.

$$\text{radon}(\rho, 0) \text{ assuming } -1 \leq \rho \leq 1 = 2\sqrt{-\rho^2 + 1}$$

En cirkel

- **assuming** ("under antagelse af") er en stærk kommando i Maple!
- Uden assuming bliver svaret (uha!):

$$radon(\rho, 0) = 2 \left(\left(- \left(\begin{cases} 1 & -\sqrt{-\text{signum}(\rho^2 - 1)} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \sqrt{-\rho^2 + 1} + \begin{matrix} 0 \\ \left(\begin{cases} 1 & \sqrt{-\text{signum}(\rho^2 - 1)} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \sqrt{-\rho^2 + 1} \end{matrix} \right) \mathfrak{S}(\sqrt{-\rho^2 + 1}) = 0 \right. \\ \left. \text{otherwise} \right)$$

- Frem for: $radon(\rho, 0) \text{ assuming } -1 \leq \rho \leq 1 = 2\sqrt{-\rho^2 + 1}$

- NB: svaret kan udtænkes ved brug af en tegning og Pythagoras sætning.

En cirkel

Sinogrammet tegnes som et "densityplot" i Maple.

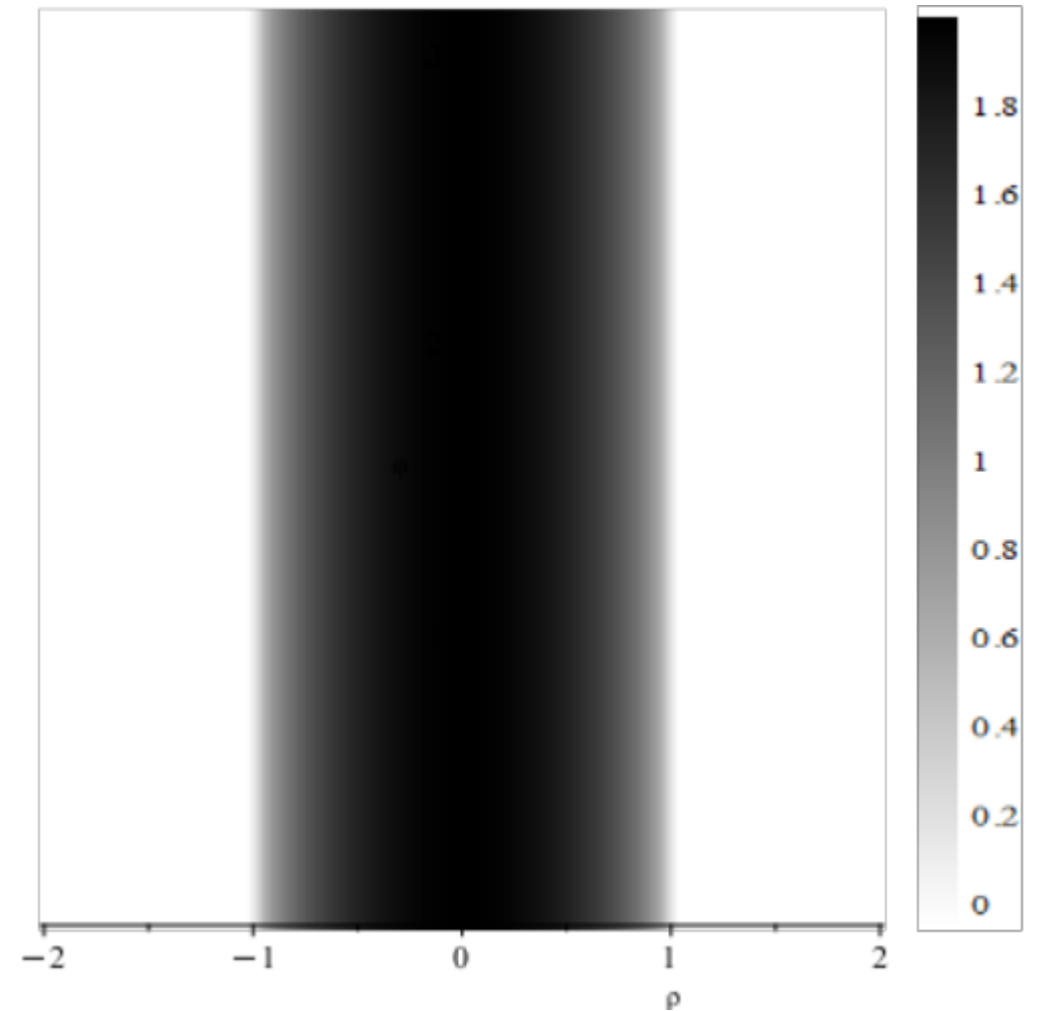
NB: jeg har valgt *omvendt* sort/hvid.

Sinogram kan tegnes, da den radontransformerede er uafhængig af φ .

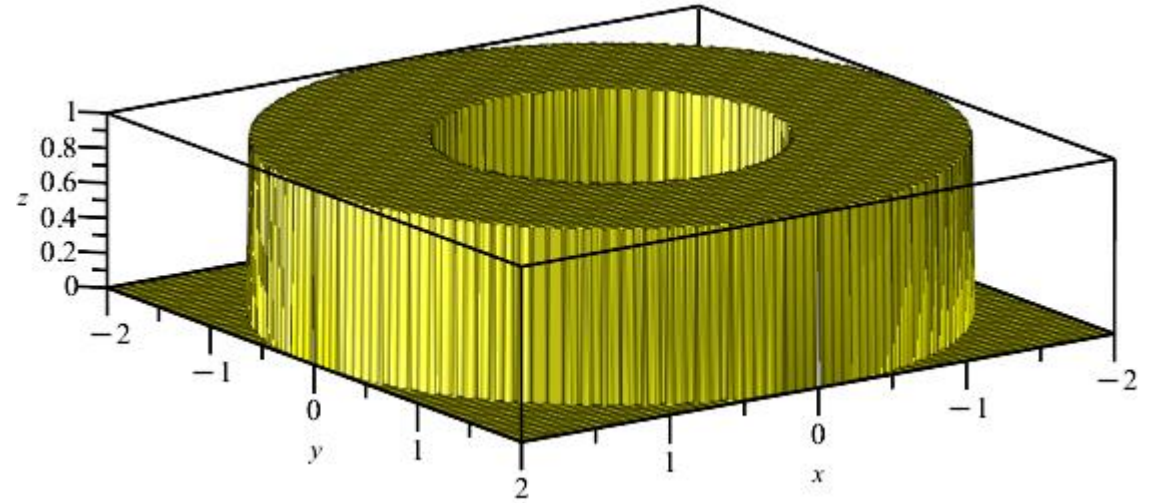
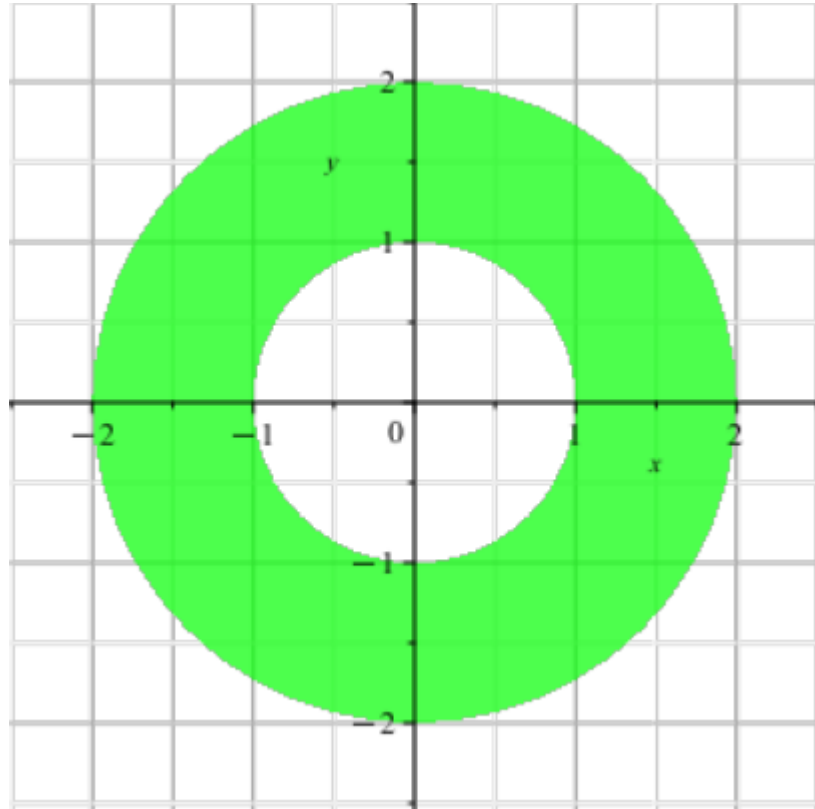
$$Rf(\rho, \varphi) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{1 - \rho^2} & |\rho| < 1 \\ 0 & |\rho| \geq 1 \end{cases}$$

Sinogram:

`densityplot(Rf(ρ, φ), ρ = -2 .. 2, φ = 0 .. π, colorscheme = ["white", "black"])`



En ring



$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

En ring

Pga. rotations symmetri, så er den radon transformerede **uafhængig** af vinklen φ .
Behøver så kun udregne resultatet når $\varphi = 0$.

Til gengæld afhænger resultatet af ρ .
Men man kan hurtigt overskue, at kun få tilfælde er relevante at beregne på.

$radon(\rho, 0)$ assuming $2 \leq \rho = 0$

$radon(\rho, 0)$ assuming $1 < \rho < 2 = 2\sqrt{-\rho^2 + 4}$

$radon(\rho, 0)$ assuming $-1 \leq \rho \leq 1 = -2\sqrt{-\rho^2 + 1} + 2\sqrt{-\rho^2 + 4}$

$radon(\rho, 0)$ assuming $-2 < \rho < -1 = 2\sqrt{-\rho^2 + 4}$

$radon(\rho, 0)$ assuming $\rho \leq -2 = 0$

NB: Man kan sagtens forstå de 5 tilfælde ud fra eksemplet med ringen!

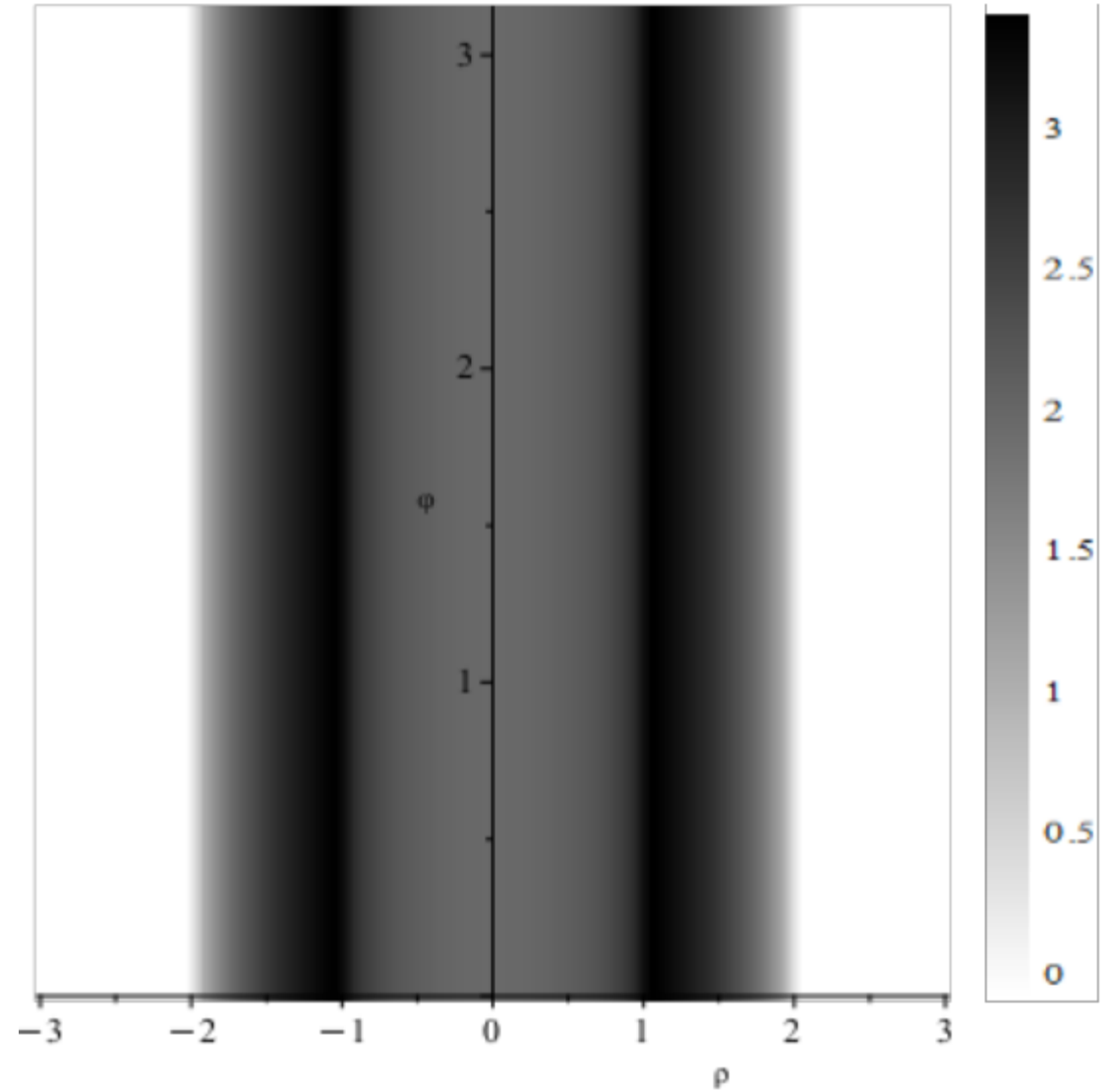
Den radon transformerede af f er:

$$Rf(\rho, \varphi) = \begin{cases} 2 \cdot (\sqrt{4 - \rho^2} - \sqrt{1 - \rho^2}) & |\rho| \leq 1 \\ 2 \cdot \sqrt{4 - \rho^2} & 1 < |\rho| < 2 \\ 0 & 2 \leq |\rho| \end{cases}$$

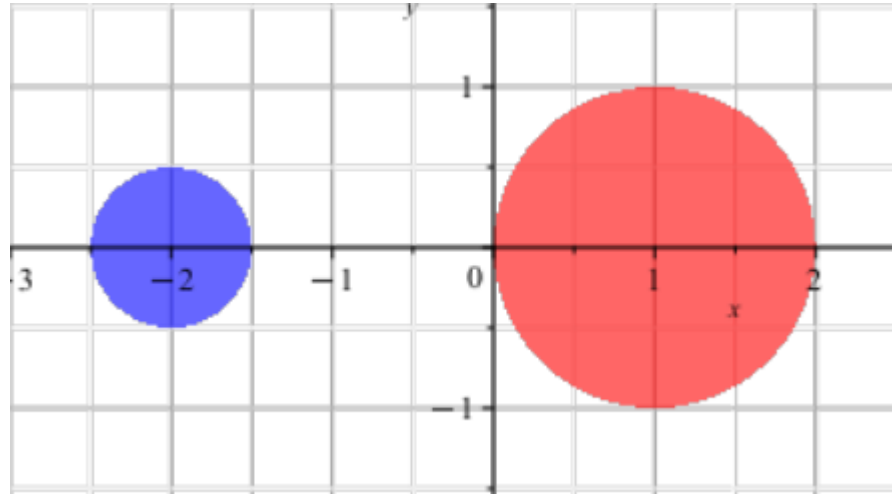
En ring

- Sinogram

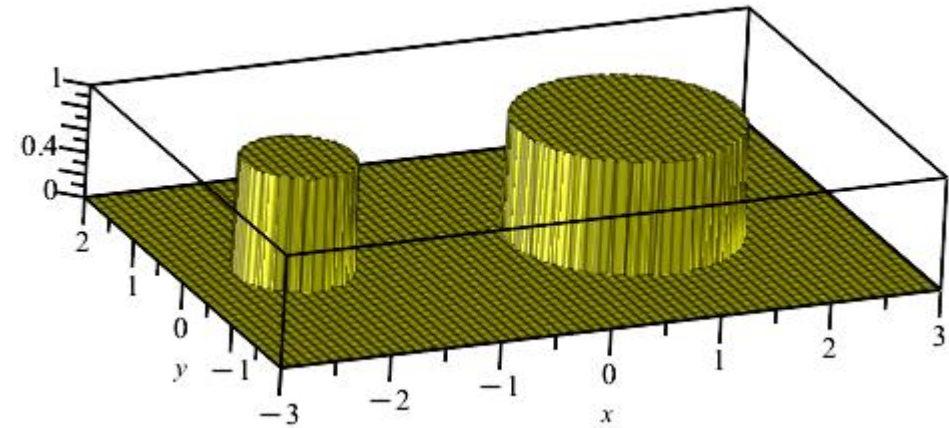
$$Rf(\rho, \varphi) := \begin{cases} 2 \cdot (\sqrt{4 - \rho^2} - \sqrt{1 - \rho^2}) & |\rho| \leq 1 \\ 2 \cdot \sqrt{4 - \rho^2} & 1 < |\rho| < 2 \\ 0 & 2 \leq |\rho| \end{cases}$$



2 cirkler



$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & (x+2)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

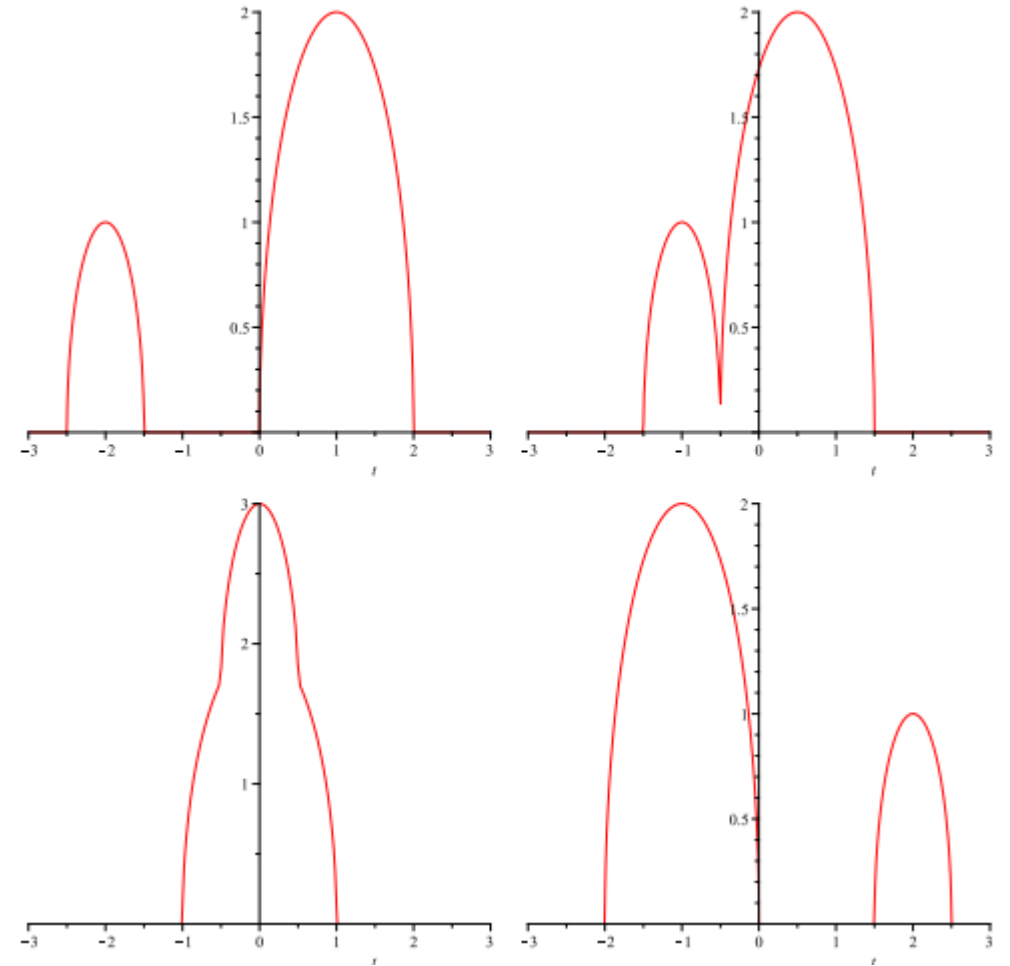


2 cirkler

- Inspiration fra Kailey Bolles:
https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/SeniorProject_KaileyBolles.pdf (side 6)

FIGURE 4. Radon transform $\mathcal{R}(g)$ of the piecewise-defined function g at the angles $\theta = 0$ (upper left), $\theta = \frac{\pi}{3}$ (upper right), $\theta = \frac{\pi}{2}$ (lower left), and $\theta = \pi$ (lower right). Note that in this parametrization, the angle θ is perpendicular to the angle of the line passing through the object. Image created using Maple.

Men hvordan i Maple?



2 cirkler

Vinklen $\varphi = 0$

$r1 := \text{radon}(\rho, 0)$ assuming $2 < \rho = 0$

$r2 := \text{radon}(\rho, 0)$ assuming $0 \leq \rho \leq 2 = 2\sqrt{-\rho^2 + 2\rho}$

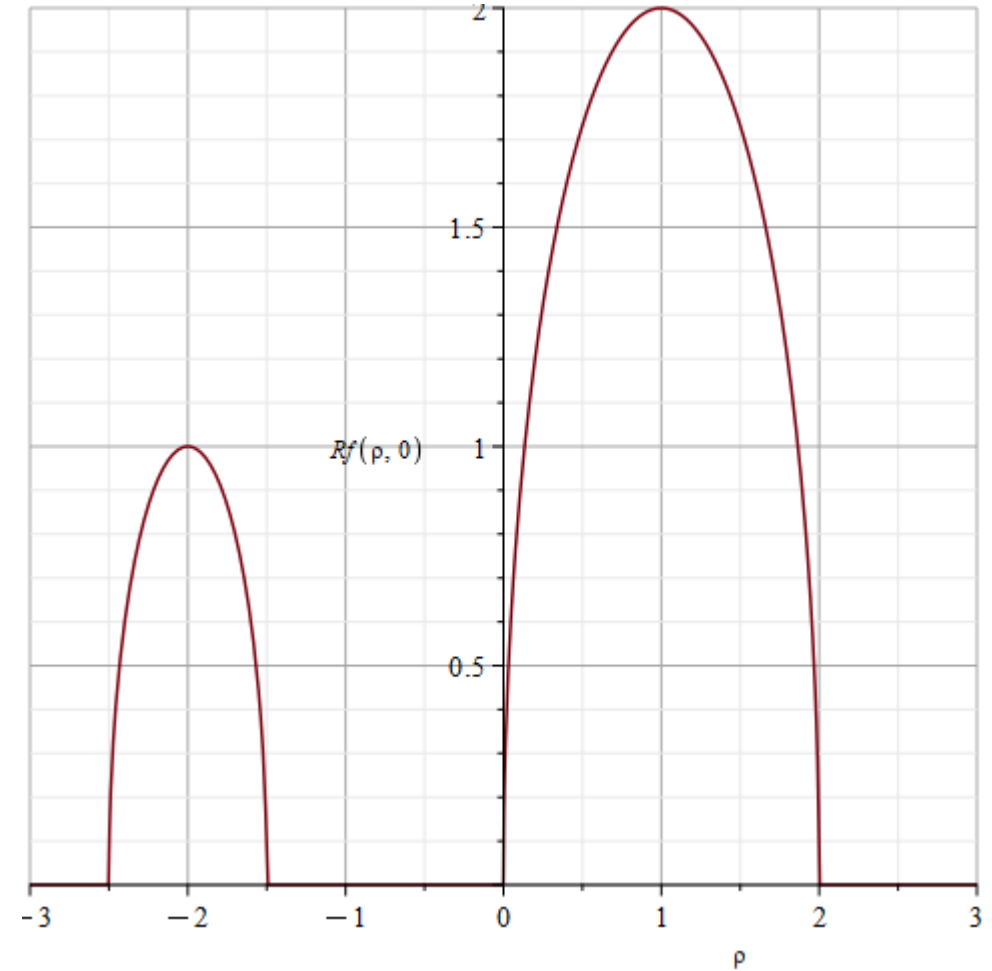
$r3 := \text{radon}(\rho, 0)$ assuming $-\frac{3}{2} < \rho < 0 = 0$

$r4 := \text{radon}(\rho, 0)$ assuming $-\frac{5}{2} \leq \rho \leq -\frac{3}{2} = \sqrt{-4\rho^2 - 16\rho - 15}$

$r5 := \text{radon}(\rho, 0)$ assuming $\rho < -\frac{5}{2} = 0$

$$Rf(\rho) := \begin{cases} r1 & 2 < \rho \\ r2 & 0 \leq \rho \leq 2 \\ r3 & -\frac{3}{2} < \rho < 0 \\ r4 & -\frac{5}{2} \leq \rho \leq -\frac{3}{2} \\ r5 & \rho < -\frac{5}{2} \end{cases} :$$

$\text{plot}(Rf(\rho), \rho = -3 \dots 3, \text{labels} = [\rho, 'Rf(\rho, 0)'], \text{gridlines})$



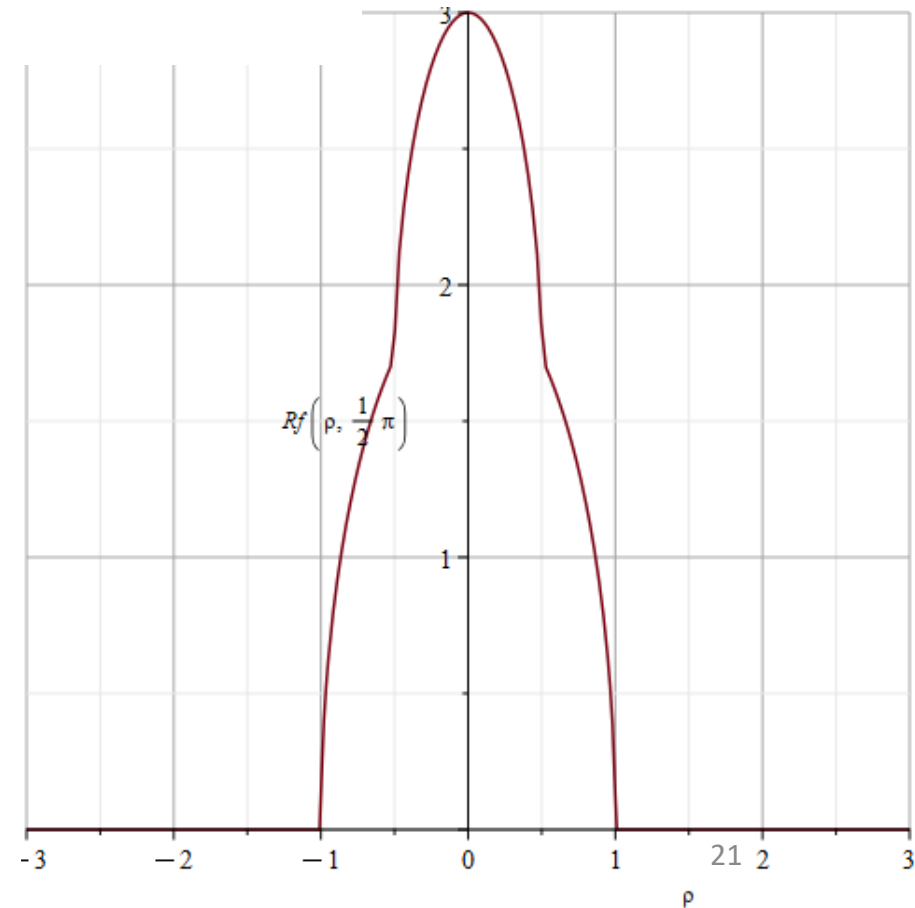
2 cirkler

$$\text{Vinklen } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$Rf(\rho) := \text{piecewise} \left(\rho > 1, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \rho > 1 \right), \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \right), \right. \\ \left. -\frac{1}{2} < \rho < \frac{1}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } -\frac{1}{2} < \rho < \frac{1}{2} \right), -1 \leq \rho \leq -\frac{1}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } -1 \leq \rho \leq -\frac{1}{2} \right), \right. \\ \left. \rho < -1, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \rho < -1 \right) \right):$$

$$Rf(\rho) = \begin{cases} 0 & 1 < \rho \\ 2\sqrt{-\rho^2 + 1} & \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \\ 2\sqrt{-\rho^2 + 1} + \sqrt{-4\rho^2 + 1} & -\frac{1}{2} < \rho < \frac{1}{2} \\ 2\sqrt{-\rho^2 + 1} & -1 \leq \rho \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \rho < -1 \end{cases}$$

$$\text{plot} \left(Rf(\rho), \rho = -3 \dots 3, \text{labels} = \left[\rho, Rf \left(\rho, \frac{\pi}{2} \right) \right], \text{gridlines} \right)$$



2 cirkler

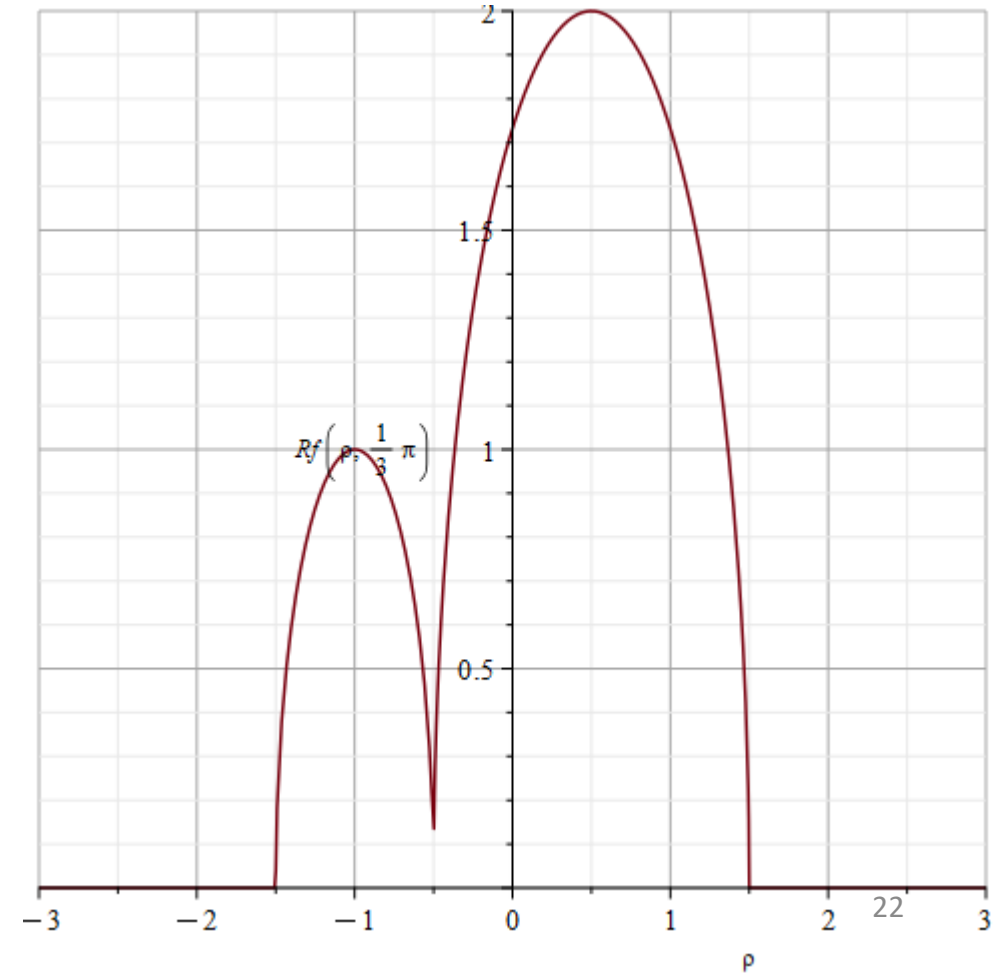
$$\text{Vinklen } \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$Rf := \text{unapply}\left(\text{piecewise}\left(\rho > \frac{3}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \rho > \frac{3}{2}\right), -\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{3}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } -\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{3}{2}\right), -\frac{3}{2} \leq \rho < -\frac{1}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } -\frac{3}{2} \leq \rho < -\frac{1}{2}\right), \rho < -\frac{3}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \rho < -\frac{3}{2}\right)\right), [\rho]\right):$

$$Rf(\rho) = \begin{cases} 0 & \frac{3}{2} < \rho \\ \sqrt{-4\rho^2 + 4\rho + 3} & -\frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{3}{2} \\ \sqrt{-4\rho^2 - 8\rho - 3} & -\frac{3}{2} \leq \rho < -\frac{1}{2} \\ 0 & \rho < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$Rf\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Så grafen går åbenbart helt ned til 0 i $\rho = -\frac{1}{2}$



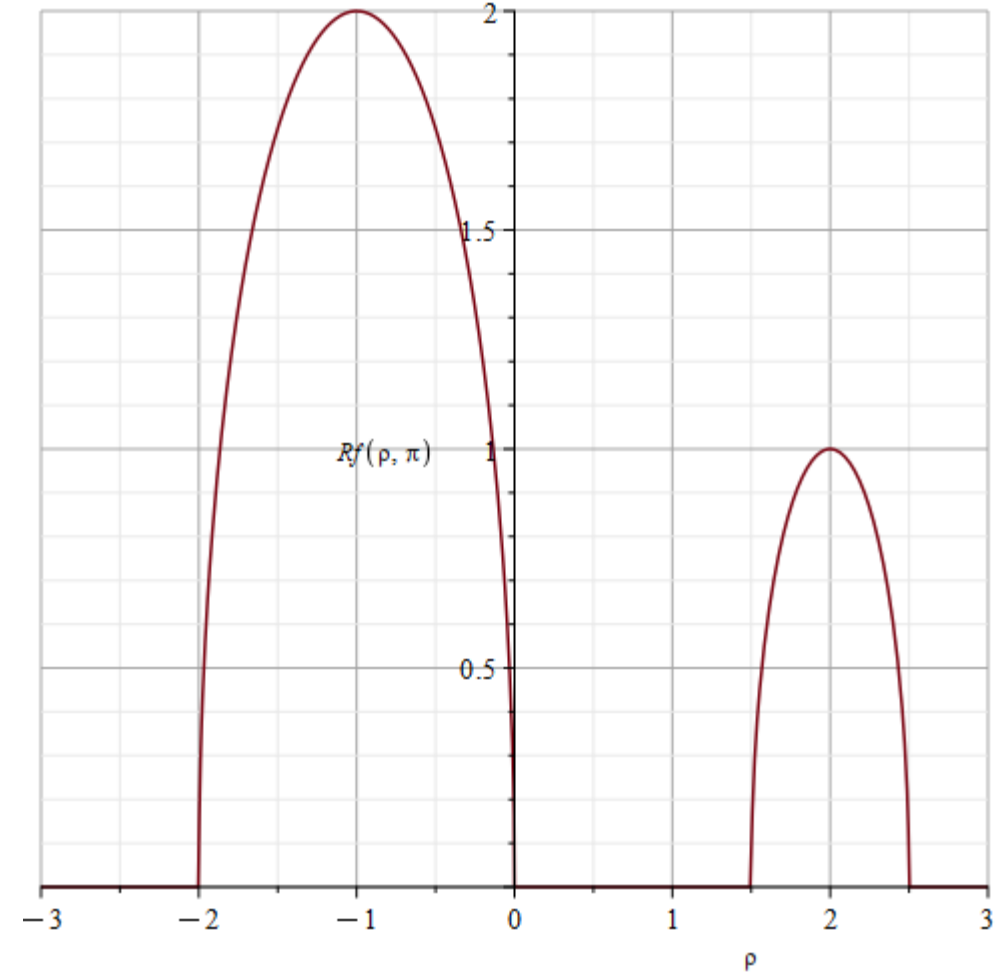
2 cirkler

Vinklen $\varphi = \pi$

$$Rf := \text{unapply} \left(\text{piecewise} \left(\rho > \frac{5}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \rho > \frac{5}{2} \right), \right. \right. \\ \left. \left. \frac{3}{2} \leq \rho \leq \frac{5}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \frac{3}{2} \leq \rho \leq \frac{5}{2} \right), \right. \right. \\ \left. \left. 0 \leq \rho < \frac{3}{2}, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } 0 \leq \rho < \frac{3}{2} \right), \right. \right. \\ \left. \left. -2 \leq \rho < 0, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } -2 \leq \rho < 0 \right), \right. \right. \\ \left. \left. \rho < -2, \left(\text{radon}(\rho, \varphi) \text{ assuming } \rho < -2 \right) \right), [\rho] \right):$$

$$Rf(\rho) = \begin{cases} 0 & \frac{5}{2} < \rho \\ \sqrt{-4\rho^2 + 16\rho - 15} & \frac{3}{2} \leq \rho \leq \frac{5}{2} \\ 0 & 0 \leq \rho < \frac{3}{2} \\ 2\sqrt{-\rho^2 - 2\rho} & -2 \leq \rho < 0 \\ 0 & \rho < -2 \end{cases}$$

`plot(Rf(ρ), ρ=-3..3, labels=[ρ,'Rf(ρ, π)'], gridlines)`



Numerisk integration

Definition af den radon transformerede af f :

$$\text{radon}(\rho, \varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho \cdot \cos(\varphi) - t \cdot \sin(\varphi), \rho \cdot \sin(\varphi) + t \cdot \cos(\varphi)) dt :$$

- Ved at anvende **numerisk integration** behøver man ikke at udtænke den Radon-transformerede!
Prisen er **meget langsom** beregning.
Kaldes så "radonS" frem for "radon".

$$\text{radonS}(\rho, \varphi) := \text{int}(f(\rho \cdot \cos(\varphi) - t \cdot \sin(\varphi), \rho \cdot \sin(\varphi) + t \cdot \cos(\varphi)), t = -3 .. 3, \text{numeric} = \text{true}) :$$

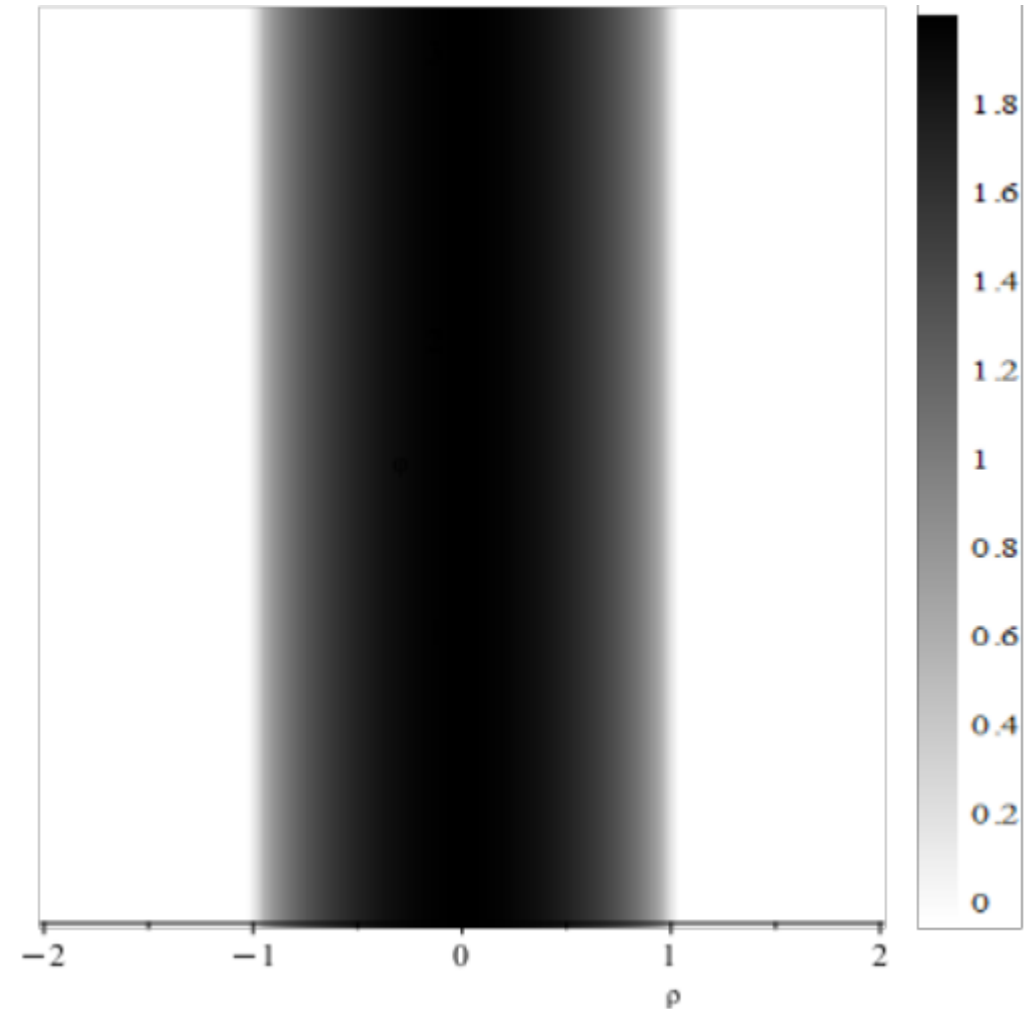
- NB: Det hele forgår indenfor -3 til 3 i t. Ikke integrere til/fra ∞ .

Numerisk integration (en cirkel)

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

`densityplot(radonS(ρ , φ), $\rho = -2..2$, $\varphi = 0..\pi$, colorscheme = ["white", "black"])`

Radon-transformationen og dermed sinogrammet er uafhængig af vinklen φ .

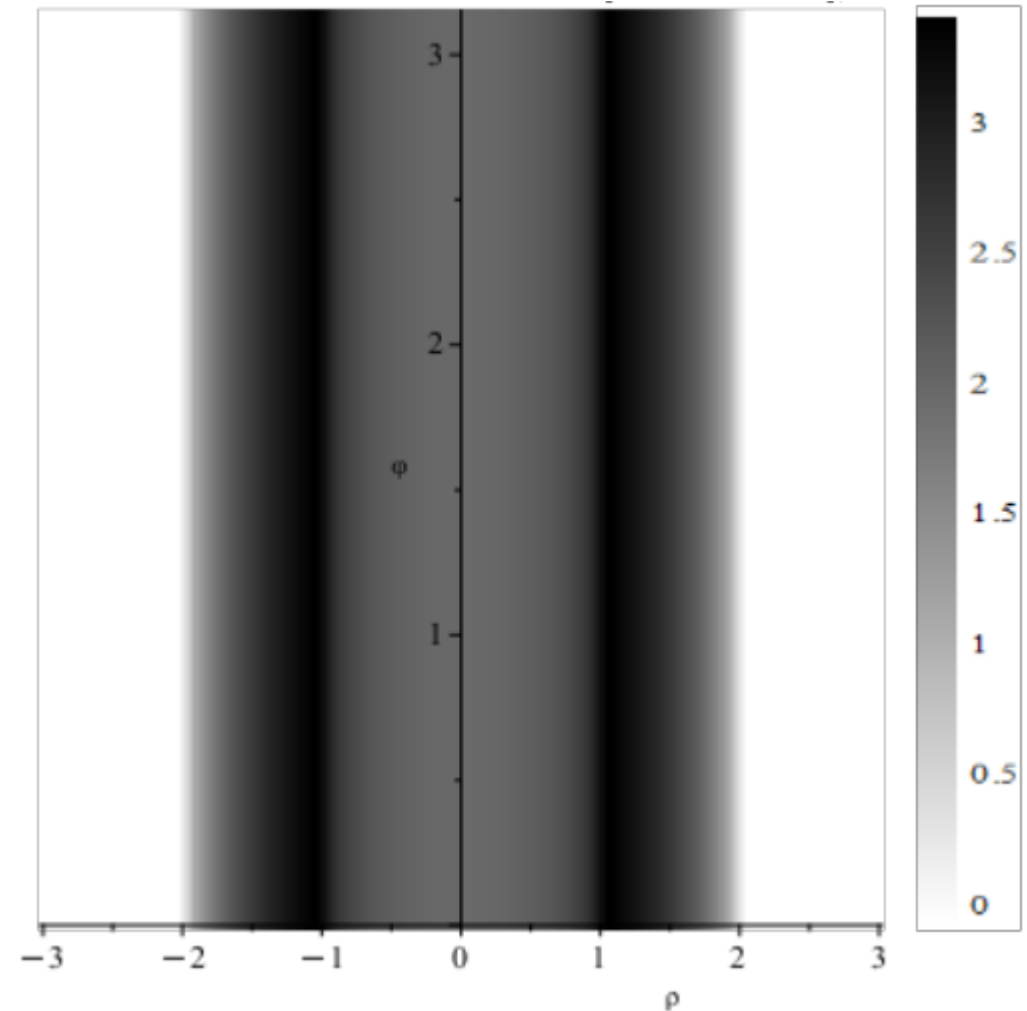


Numerisk integration (en ring)

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

`densityplot(radonS(ρ , φ), $\rho = -3 \dots 3$, $\varphi = 0 \dots \pi$, colorscheme = ["white", "black"])`

Radon-transformationen og dermed sinogrammet er uafhængig af vinklen φ .

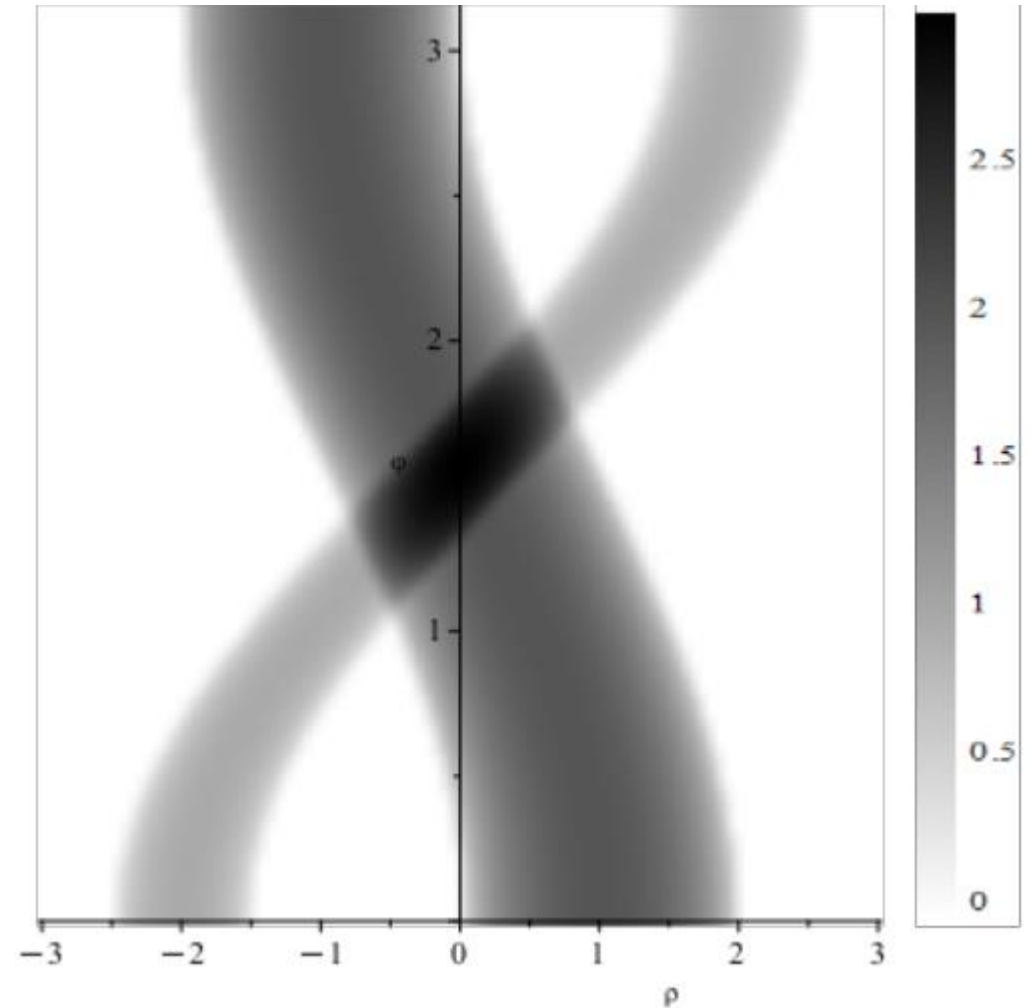


Numerisk integration (2 cirkler)

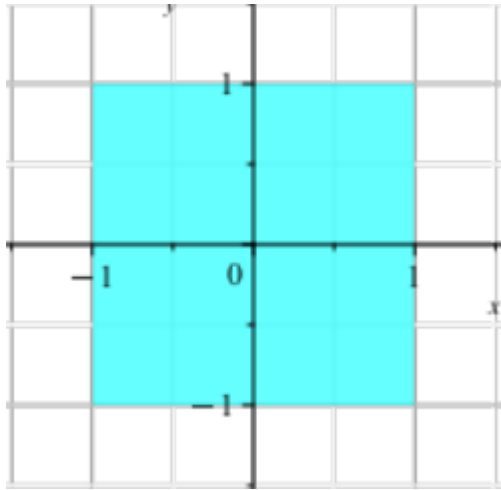
$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & (x+2)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

`densityplot(radonS(ρ , φ), $\rho = -3..3$, $\varphi = 0..\pi$, colorscheme = ["white", "black"])`

Radon-transformationen og dermed sinogrammet er **afhængig** af vinklen φ .



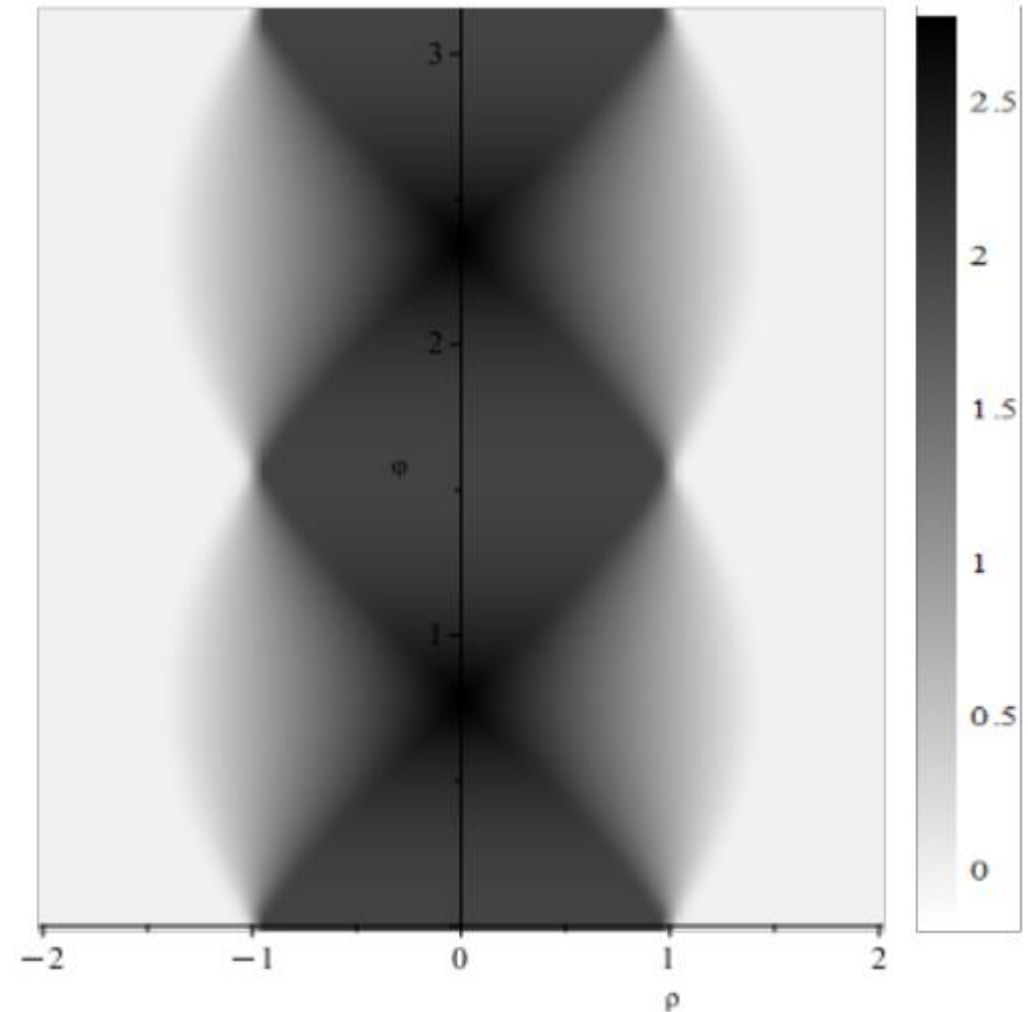
Numerisk integration (en firkant)



$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \text{ and } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

`densityplot(radonS(ρ , φ), $\rho = -2..2$, $\varphi = 0..\pi$, colorscheme = ["white", "black"])`

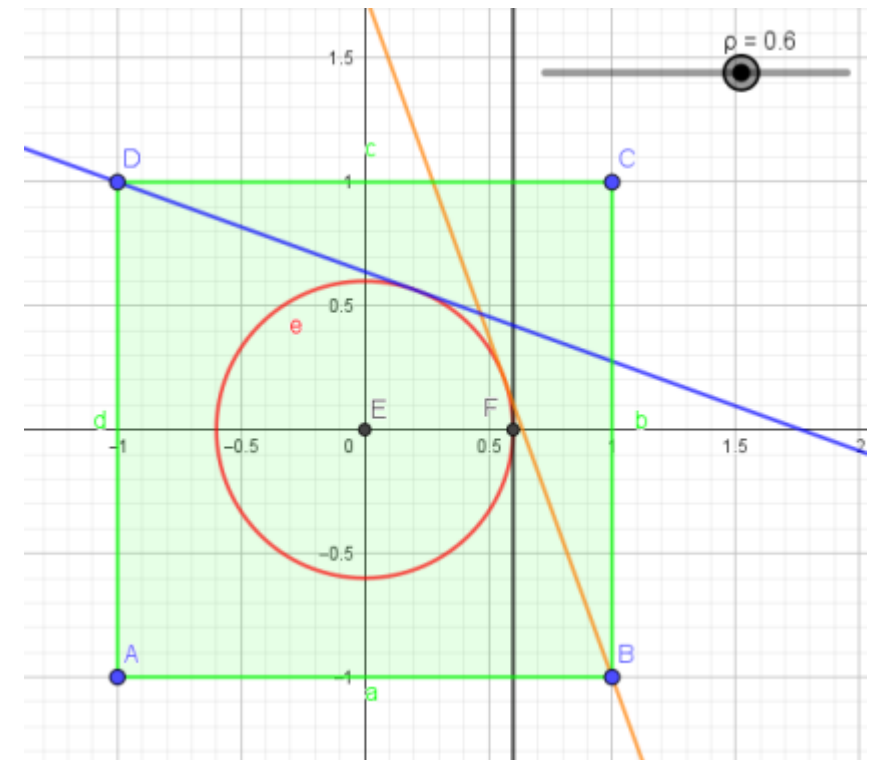
Radon-transformationen og dermed sinogrammet er **afhængig** af vinklen φ .



Radon-transformeret og sinogram (en firkant)

- **Beregning** af den Radon-transformerede er **meget langhåret!**

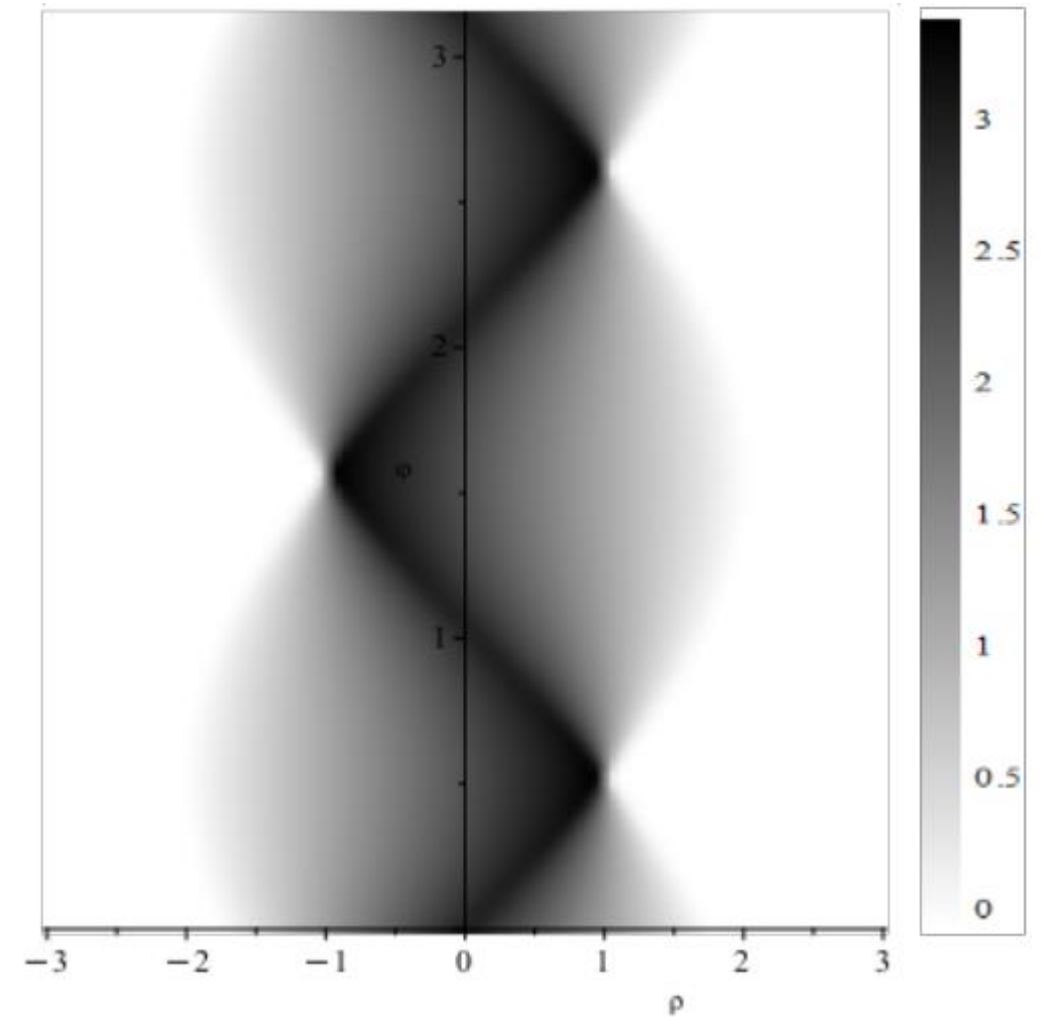
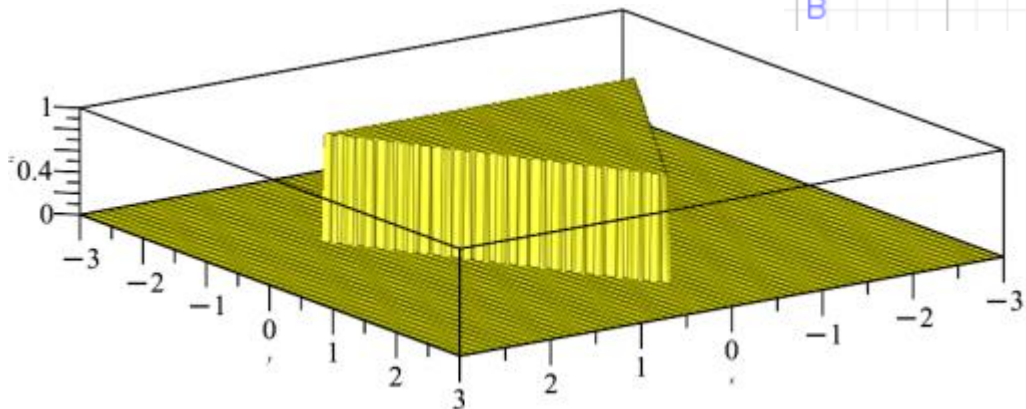
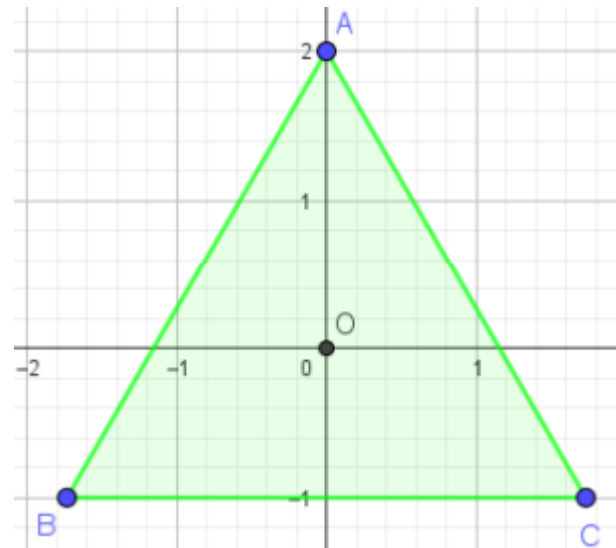
<https://steen-toft.dk/mat/ct/firkant.pdf>



Radon-transformeret og sinogram (en trekant)

Beregning af den Radon-transformerede er **meget langhåret!**

<https://steen-toft.dk/mat/ct/trekant.pdf>



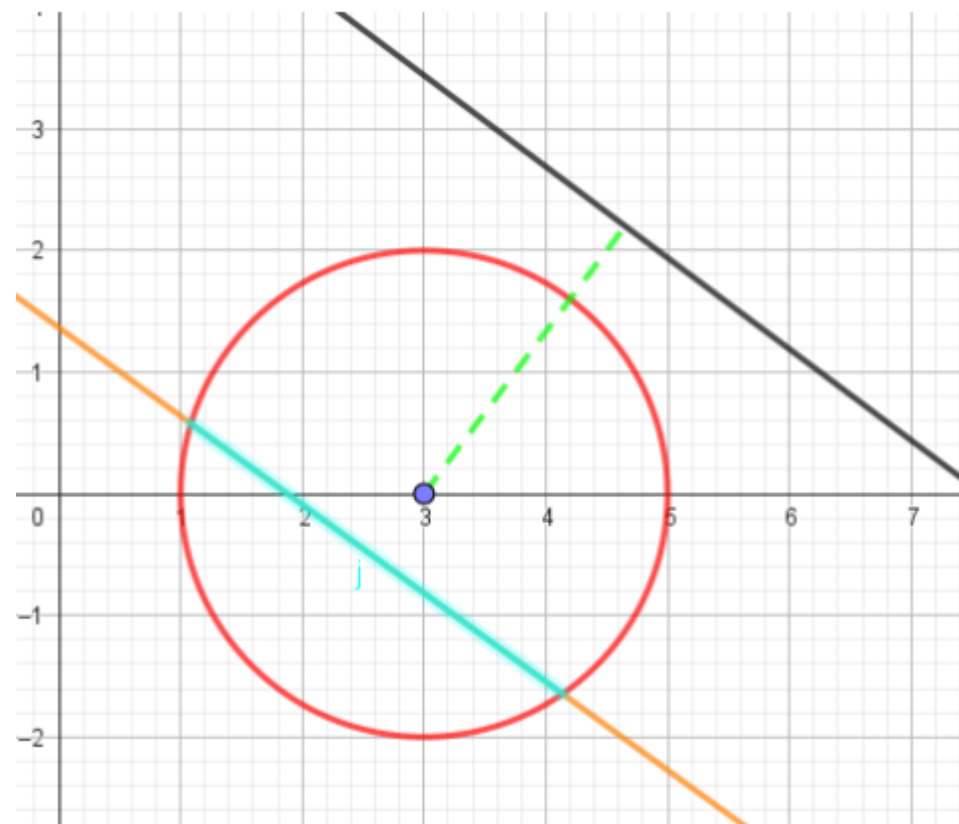
Beregning på cirkel med centrum (a,b) og r=c

Mere **langhåret** matematik og Maple:

<https://steen-toft.dk/mat/ct/f-cirkel.pdf>

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq c^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Skæring $\Leftrightarrow |a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \sin(\varphi) - \rho| < c$



Beregning på cirkel med centrum (a,b) og r=c

Procedure for Radon-transformationen

```
radon := proc(ρ, φ, a, b, c) :: real;  
  local xp, yp, LØS, t1, t2, x1, y1, x2, y2, d;  
  xp := ρ·cos(φ) - t·sin(φ) : yp := ρ·sin(φ) + t·cos(φ) :  
  LØS := solve(subs(x=xp, y=yp, (x-a)2 + (y-b)2 = c2), t) :  
  t1 := LØS[1] : t2 := LØS[2] :  
  x1 := subs(t=t1, xp) : y1 := subs(t=t1, yp) :  
  x2 := subs(t=t2, xp) : y2 := subs(t=t2, yp) :  
  d := √((x1 - x2)2 + (y1 - y2)2) :  
  return d :  
end proc:
```

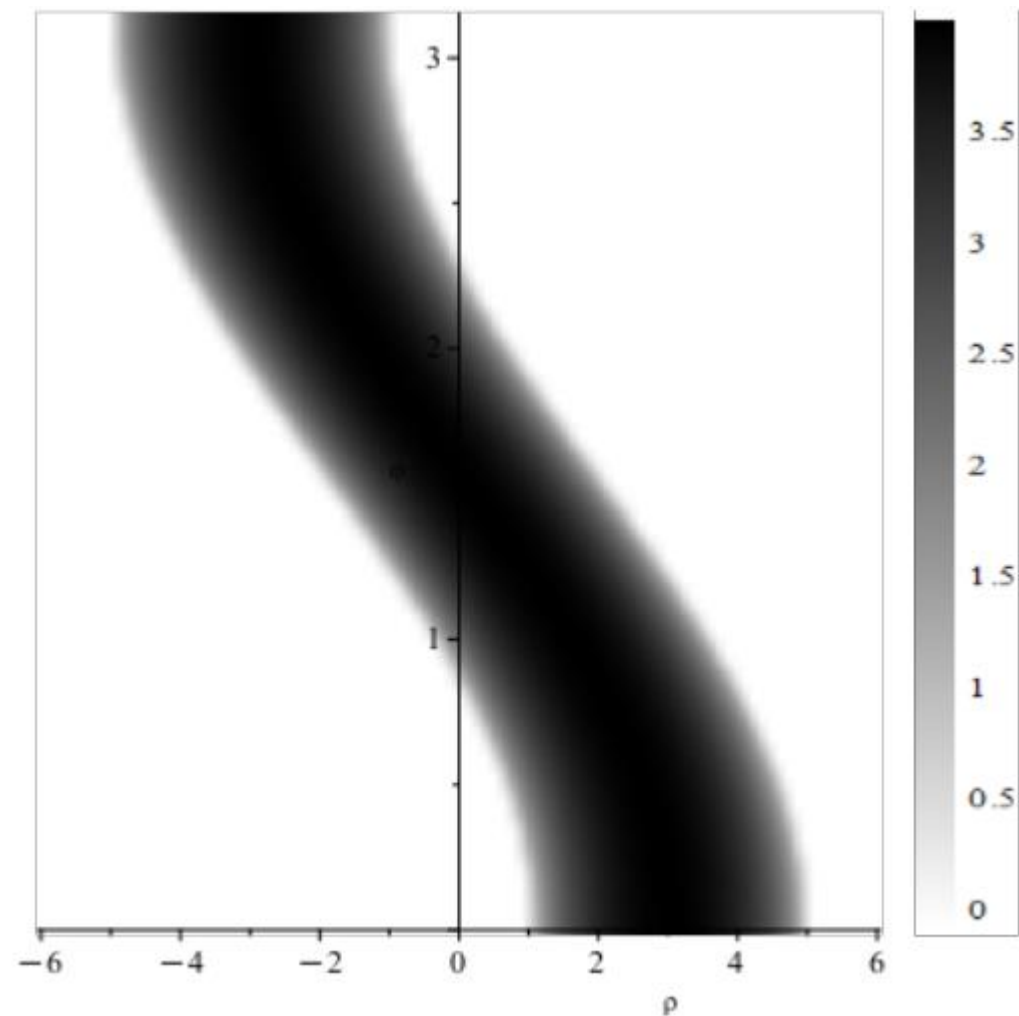
```
RfC := unapply(  $\begin{cases} \text{radon}(\rho, \varphi, a, b, c) & |a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \sin(\varphi) - \rho| < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, [\rho, \varphi, a, b, c]$  ):
```

Beregning på cirkel med centrum (a,b) og $r=c$

Sinogram af 1 forskudt cirkel

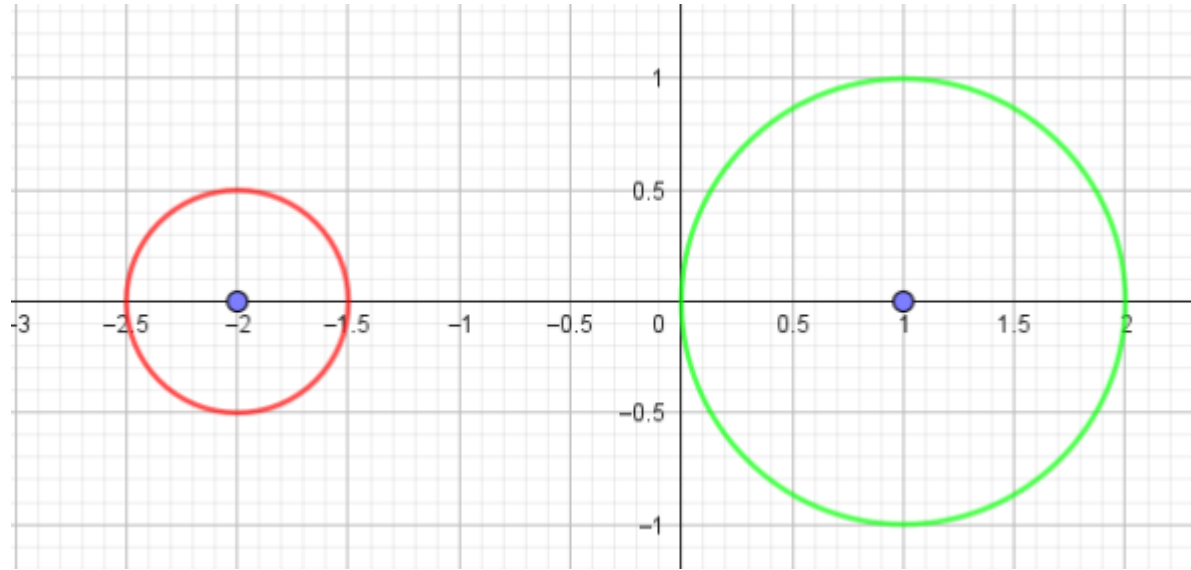
`densityplot(Rf_C(ρ , φ , 3, 0, 2), $\rho = -6..6$, $\varphi = 0..\pi$, colorscheme = ["white", "black"])`

Cirklen har centrum i $(3,0)$ og radius 2.



Beregning på 2 cirkler

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & (x + 2)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



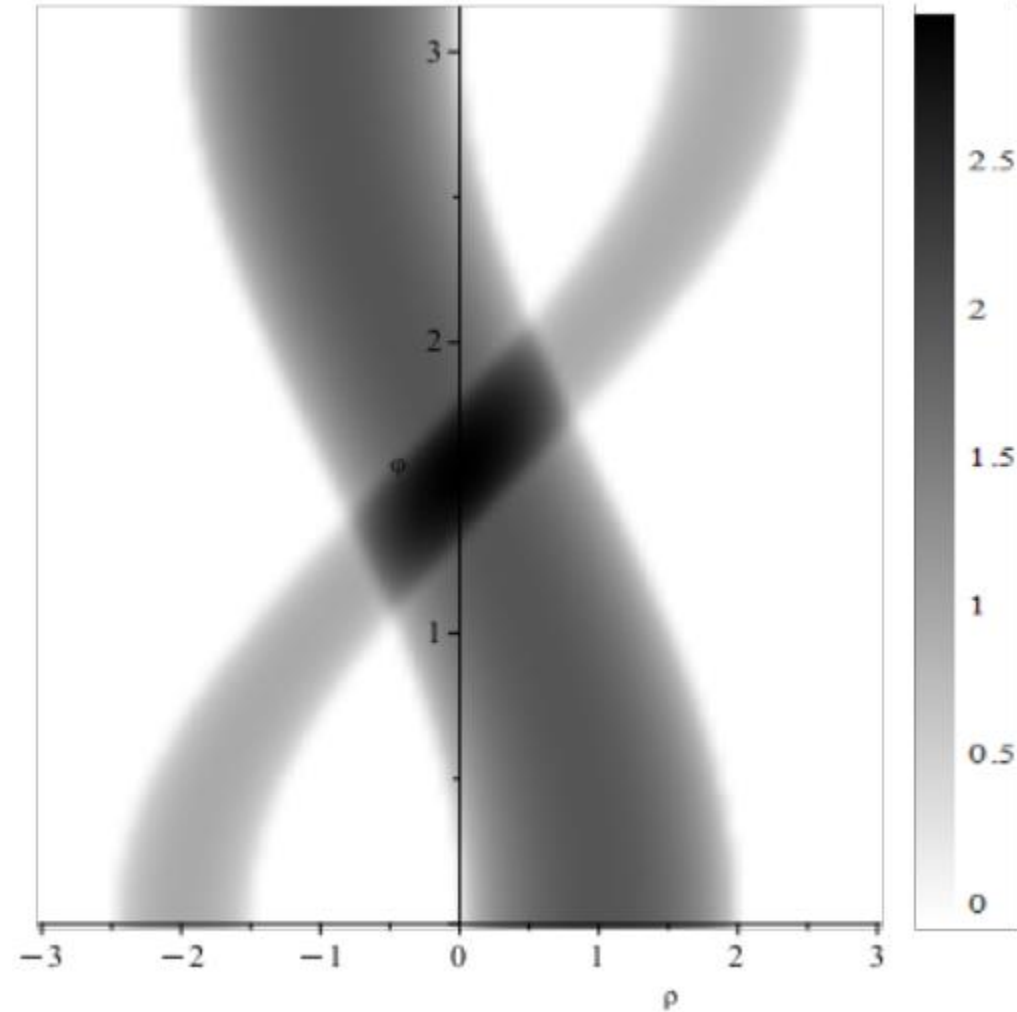
$$Rf_2(\rho, \varphi) := Rf_C(\rho, \varphi, 1, 0, 1) + Rf_C\left(\rho, \varphi, -2, 0, \frac{1}{2}\right)$$

GENIALT:

**Nu kan resultatet bestemmes for
enhver vinkel ved 2 kald af den generelle
For en cirkel med givet centrum og radius!**

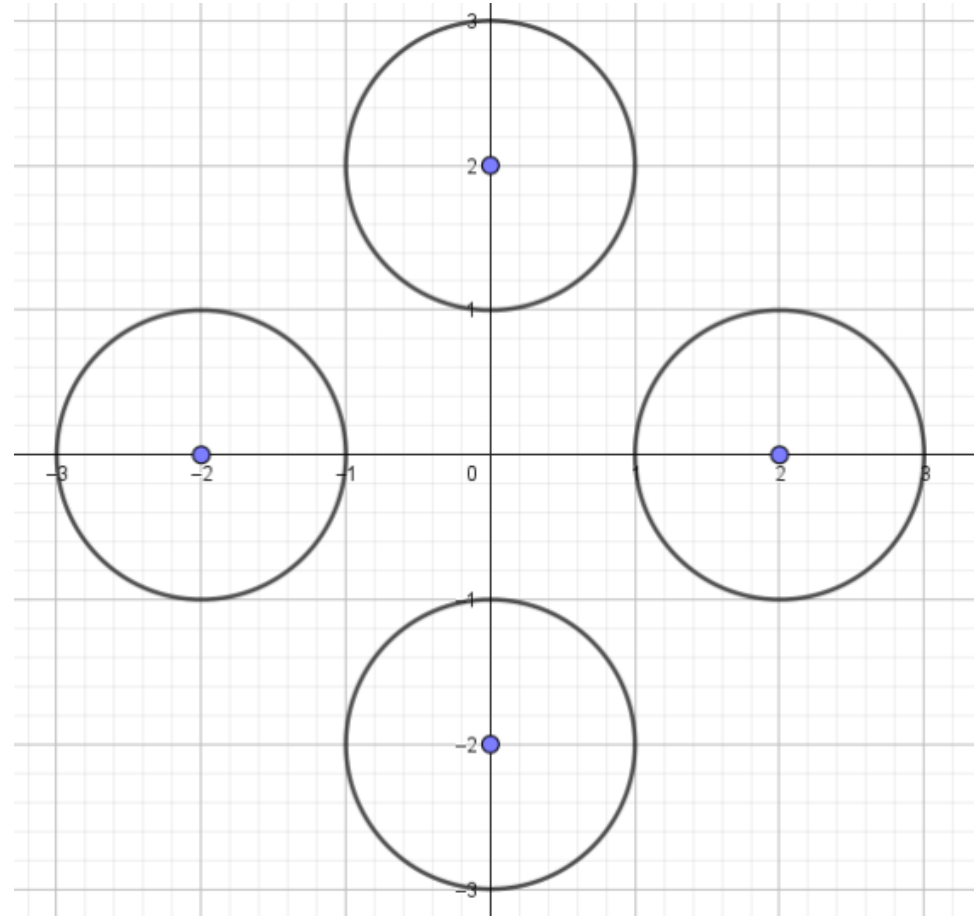
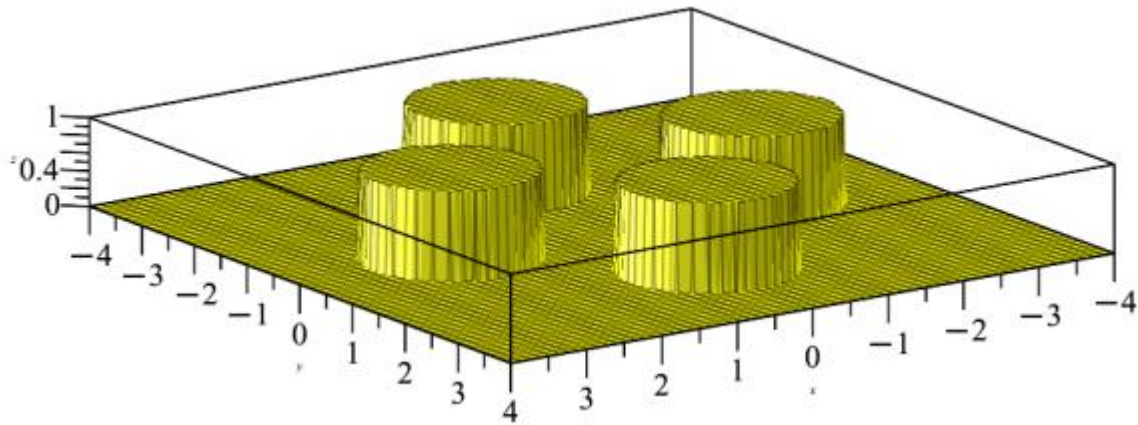
Sinogram for 2 cirkler

- Nu beregnet med min generelle cirkelformel. Og sinogrammet plottet.
- Tidligere beregnes **numerisk** (langsomt), og sinogrammet plottet derudfra.
- Og tidligere beregnet Radon-transformerede for blot 4 vinkler.



4 cirkler

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & (x - 2)^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & (x + 2)^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & x^2 + (y - 2)^2 \leq 1 \\ 1 & x^2 + (y + 2)^2 \leq 1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

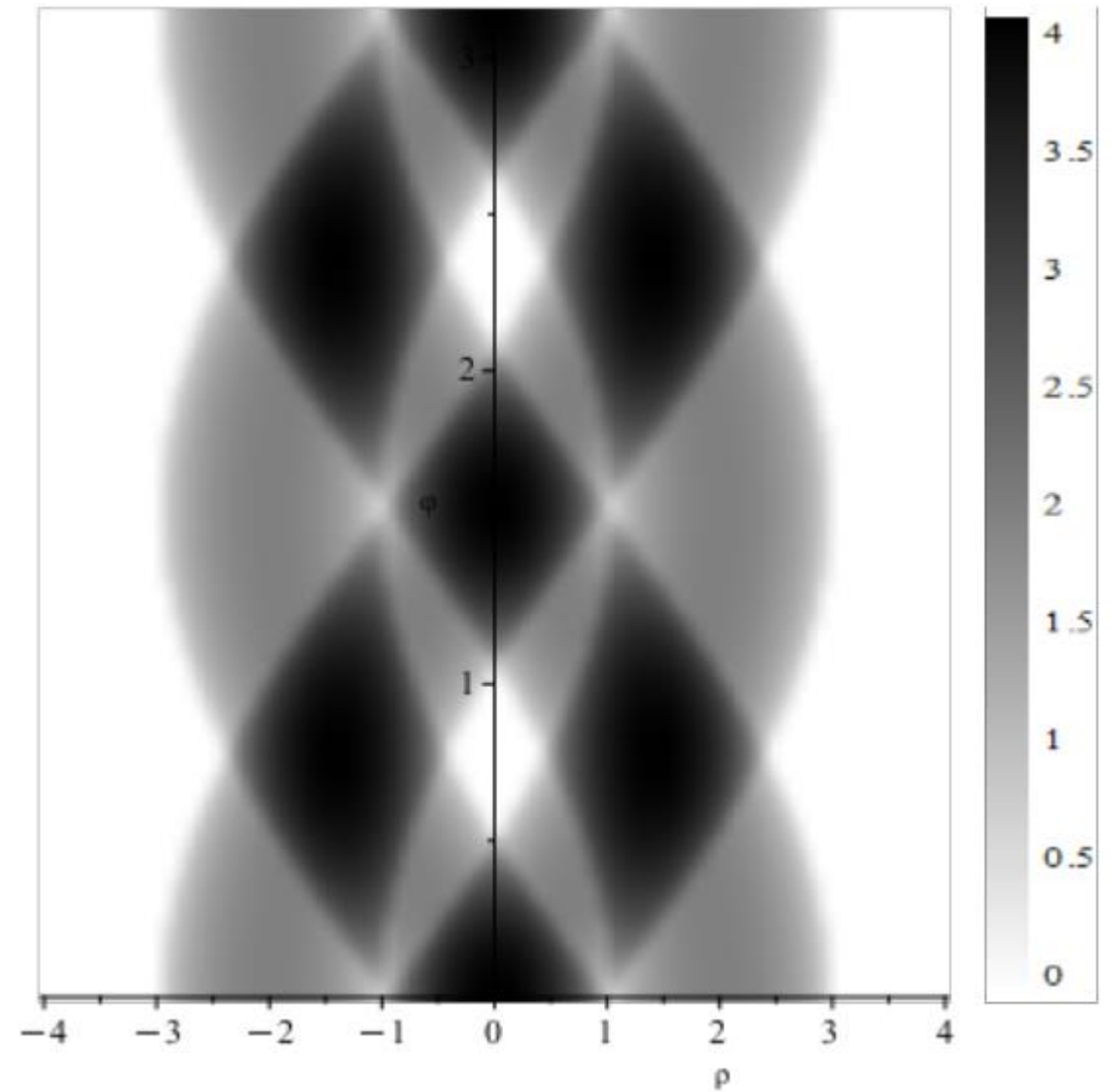


4 cirkler

$$Rf_4(\rho, \varphi) := Rf_C(\rho, \varphi, 2, 0, 1) + Rf_C(\rho, \varphi, -2, 0, 1) \\ + Rf_C(\rho, \varphi, 0, 2, 1) + Rf_C(\rho, \varphi, 0, -2, 1)$$

Sinogram af de 4 cirkler

`densityplot(Rf_4(\rho, \varphi), \rho = -4..4, \varphi = 0..\pi, colorscheme = ["white", "black"])`



En ring

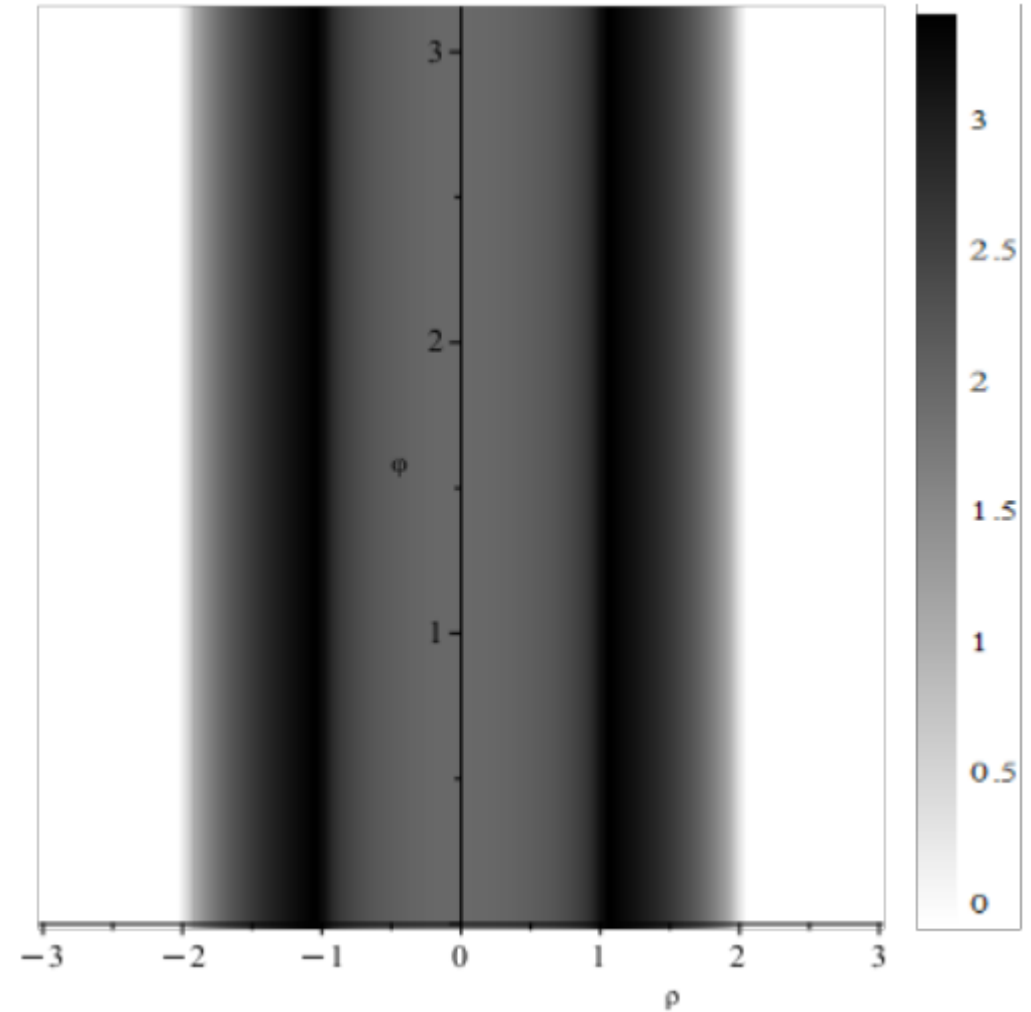
$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Radon-transformationen for de 2 cirkler subtraheres:

$$Rf_{ring}(\rho, \varphi) := Rf_C(\rho, \varphi, 0, 0, 2) - Rf_C(\rho, \varphi, 0, 0, 1)$$

Simpelt og hurtigt!

**Først med konkret beregning,
så med numerisk beregning,
og nu med cirkelformel.**



`densityplot(Rfring(rho, phi) , rho = -3 ..3, phi = 0 ..pi, colorscheme = ["white", "black"])`

En ring af cirkler!

$$R := 2 : r := \frac{1}{4} : n := 18$$

$$ROT(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

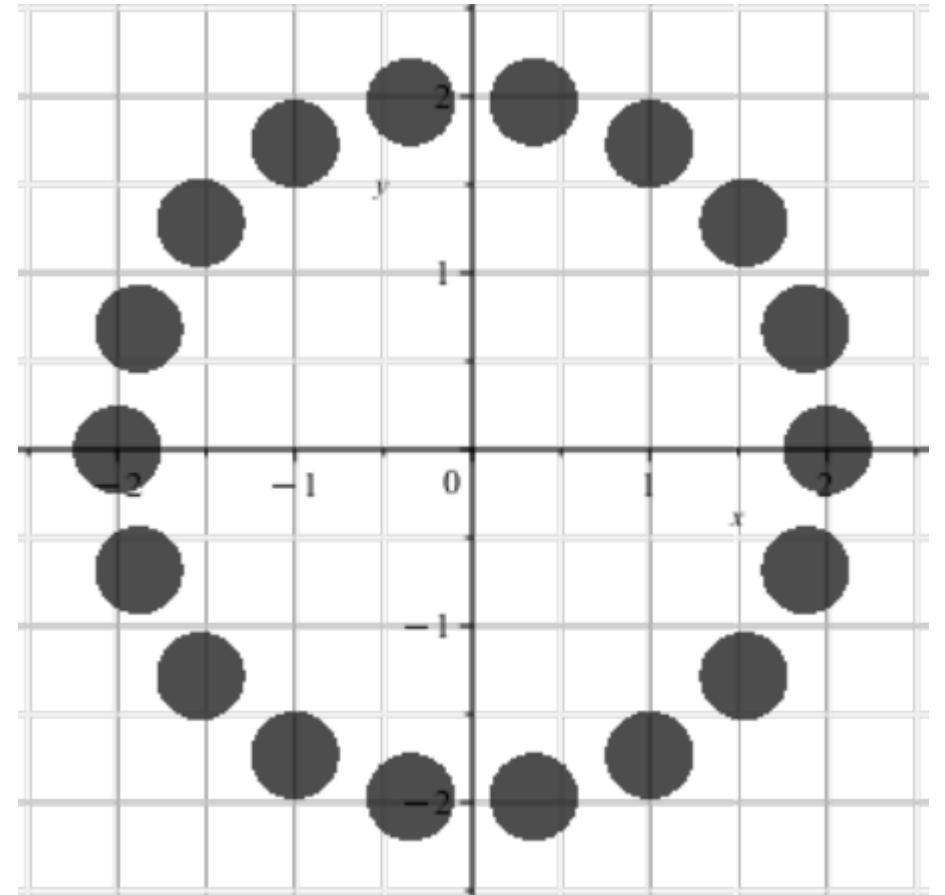
$$r_{ringcirkler} := \langle r \cdot v \cdot \cos(u), r \cdot v \cdot \sin(u) \rangle + ROT\left(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \cdot \langle R, 0 \rangle$$

Centrum for cirklerne er:

$$C_x := \text{convert}\left(\left(ROT\left(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \cdot \langle R, 0 \rangle\right), \text{matrix}\right)[1, 1]$$

$$C_y := \text{convert}\left(\left(ROT\left(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \cdot \langle R, 0 \rangle\right), \text{matrix}\right)[2, 1]$$

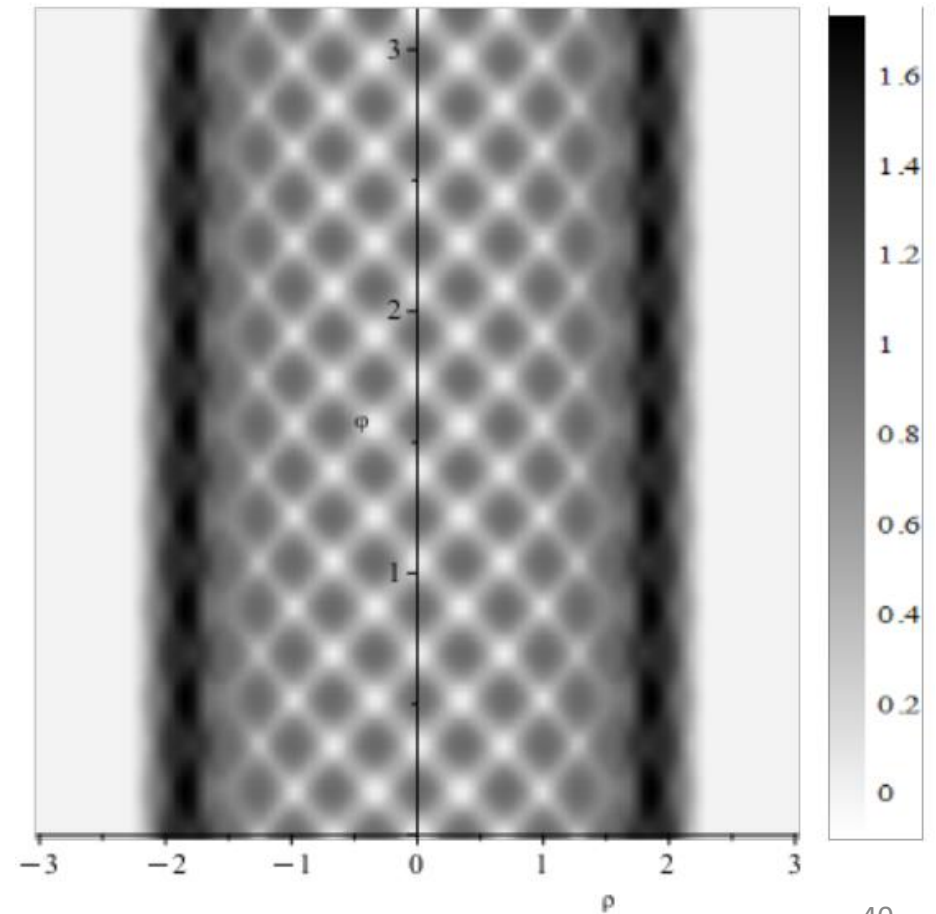
$$Rf_{ringcirkler}(\rho, \varphi) := \sum_{i=0}^{n-1} (Rf_C(\rho, \varphi, C_x, C_y, r))$$



En ring af cirkler!

`densityplot(Rfringcirkler(ρ, φ) , $\rho = -3 \dots 3$, $\varphi = 0 \dots \pi$, colorscheme = ["white", "black"])`

Klart at sinogrammet er meget mørkt omkring $|\rho| = R = 2$.
En linje med $\rho = 2$ vil gå gennem meget af cirklerne!



En kegle

<https://steen-toft.dk/mat/ct/kegle.pdf>

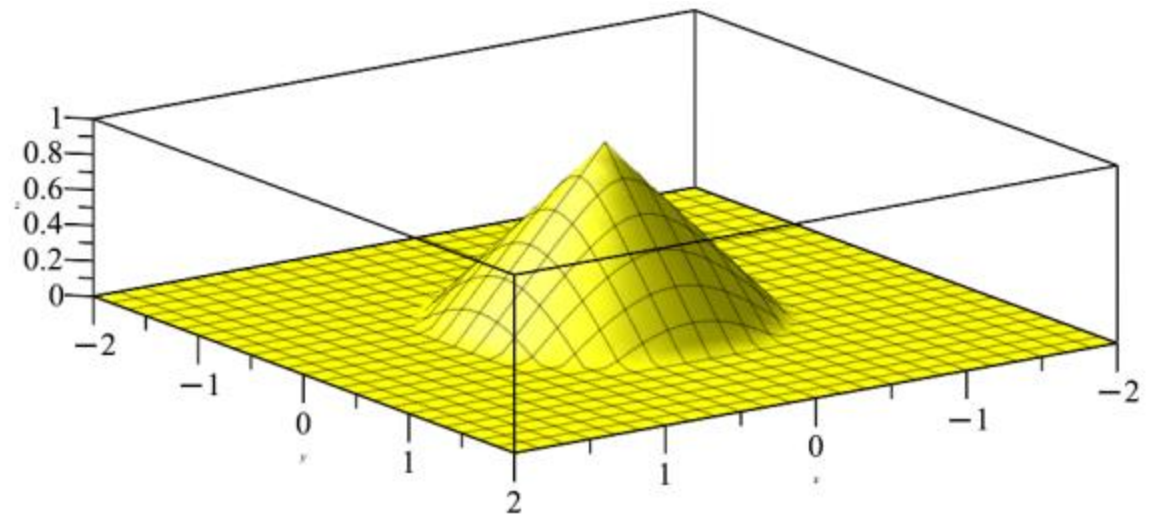
Strålingen spredes og absorberes gennem en kegle, som er 1 i toppunktet, og 0, når (x,y) ligger længere end 1 fra origo.

$$g(x) := \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} :$$

$$f(x,y) := g(\sqrt{x^2 + y^2}) :$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

**Nu er f ikke blot 0 eller 1.
Men varierer mellem 0 og 1.**

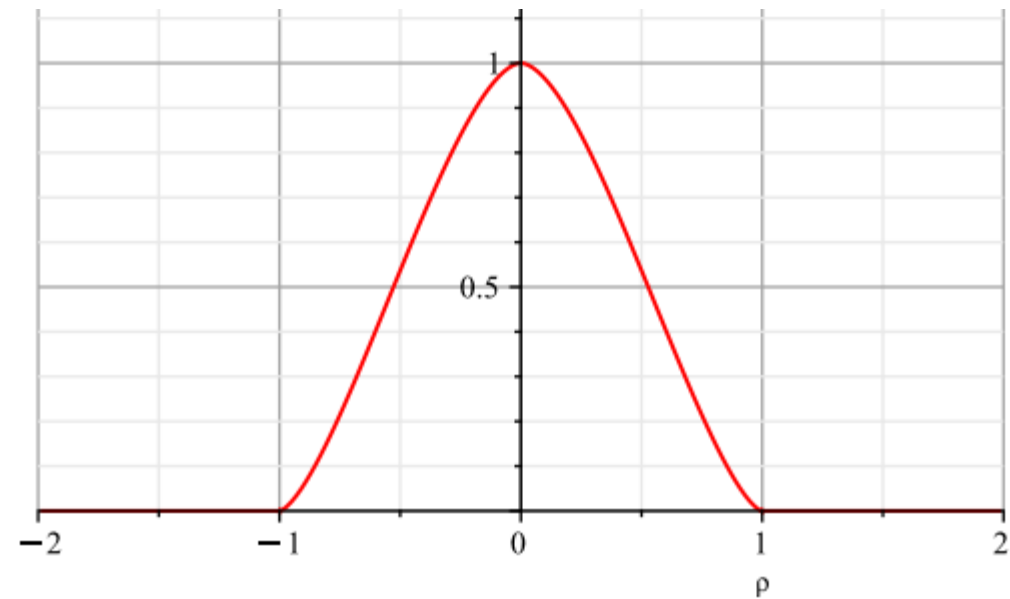


En kegle

$$Rf_1(\rho, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{-\rho^2 + 1} + \frac{\rho^2 \ln(-\sqrt{-\rho^2 + 1} + 1)}{2} - \frac{\rho^2 \ln(\sqrt{-\rho^2 + 1} + 1)}{2} & |\rho| < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Profilen af den Radon-transformerede (uafhængig af φ):

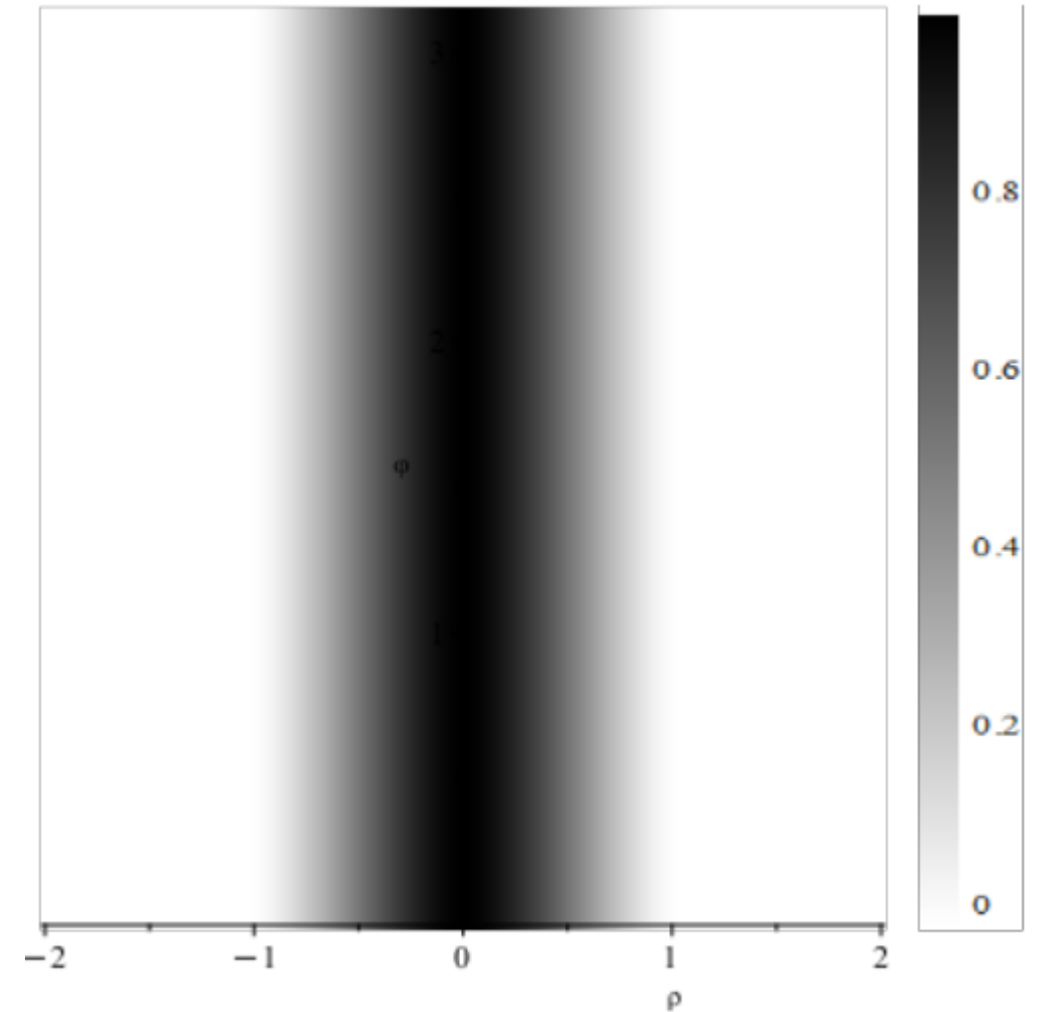
`plot(Rf_1(\rho, 0), \rho = -2 .. 2, color = red, view = [-2 .. 2, 0 .. 2], gridlines)`



En kegle

Sinogram:

`densityplot(Rf1(ρ , φ), $\rho = -2 \dots 2$, $\varphi = 0 \dots \pi$, colorscheme = ["white", "black"])`



En generaliseret kegle

Lad $a > 0$ være en parameter.

assume($a > 0$)

$$g(x) := \begin{cases} 1 - x^a & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} :$$

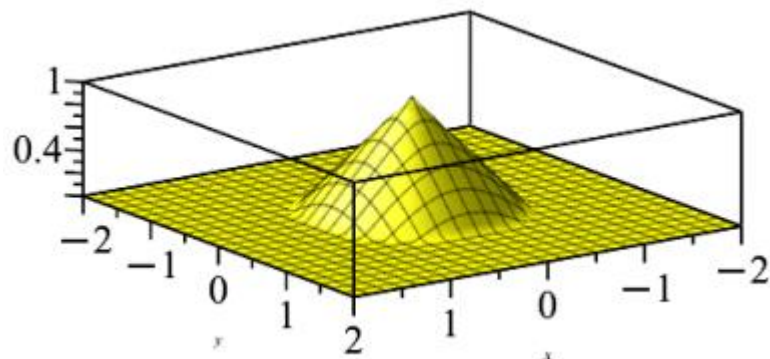
$$f(x, y) := g(\sqrt{x^2 + y^2}) :$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - (\sqrt{x^2 + y^2})^a & 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

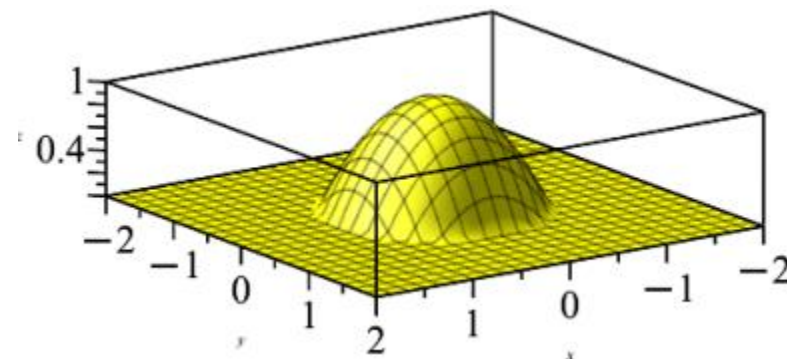
NB: $a = 1$ giver den sædvanlige kegle!

En generaliseret kegle

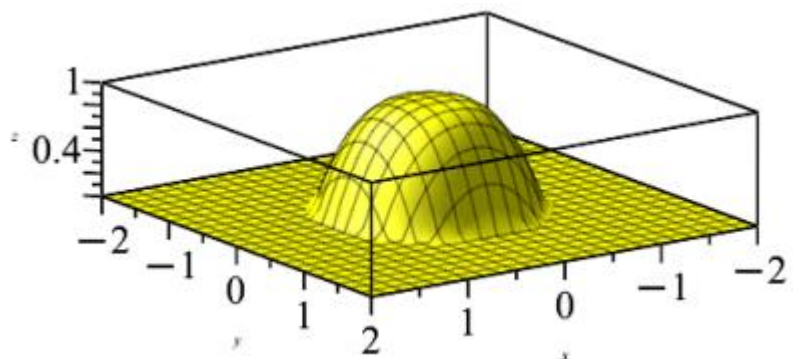
a=1



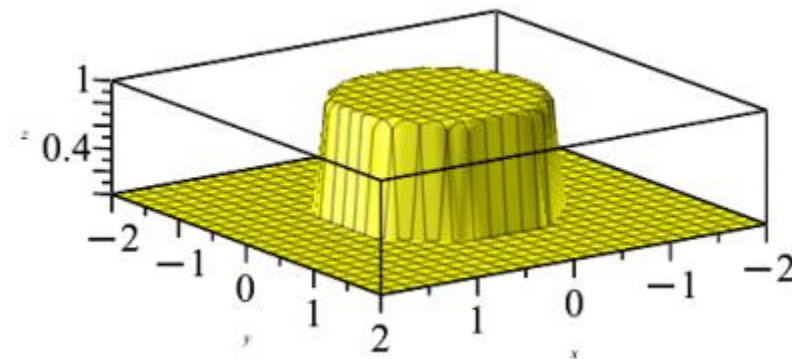
a=2



a=3

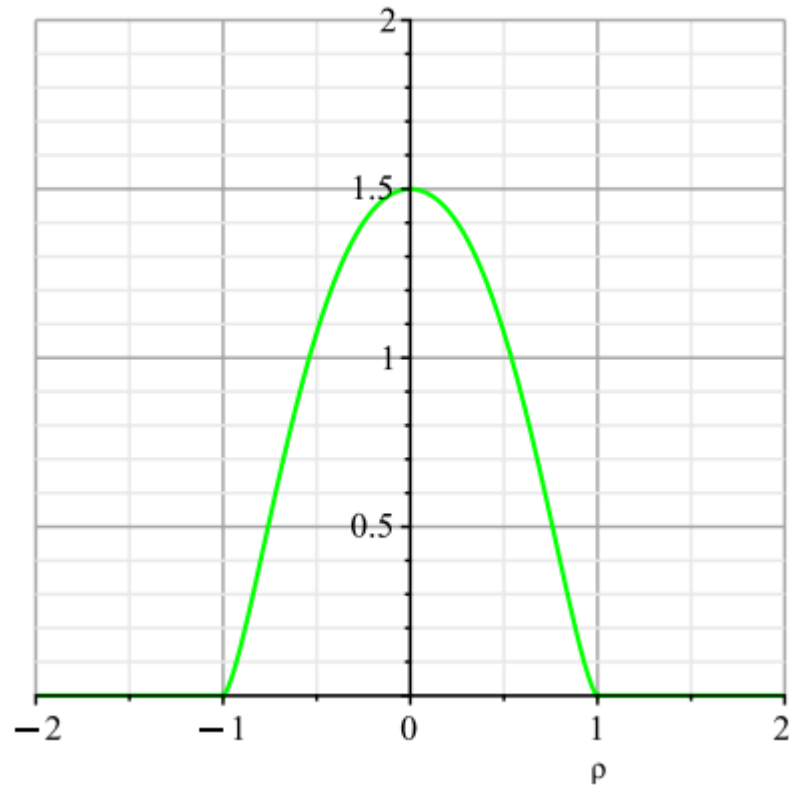


a=100

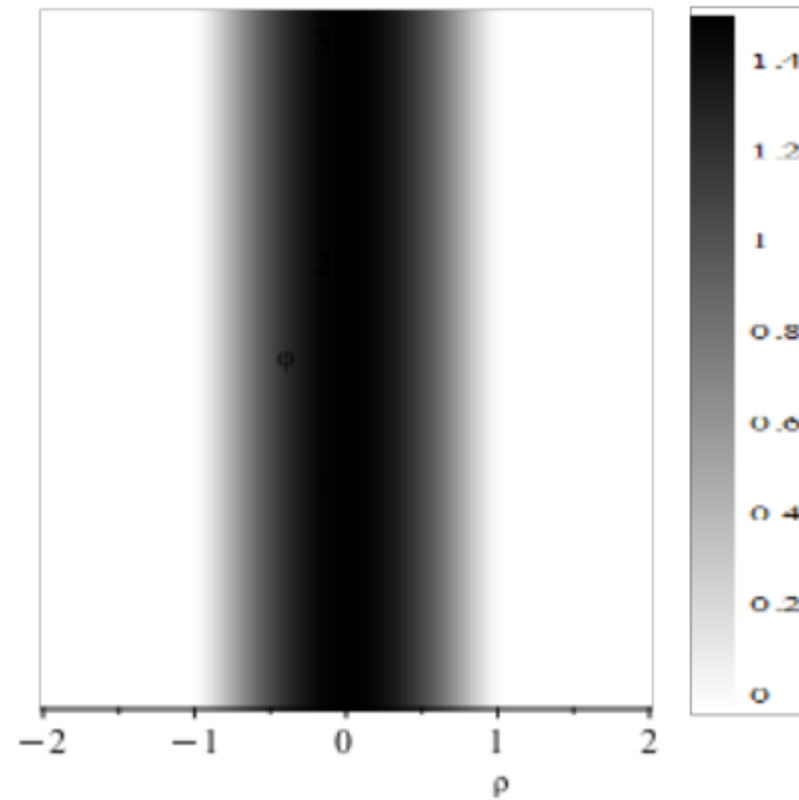


En generaliseret kegle

- **a=3**

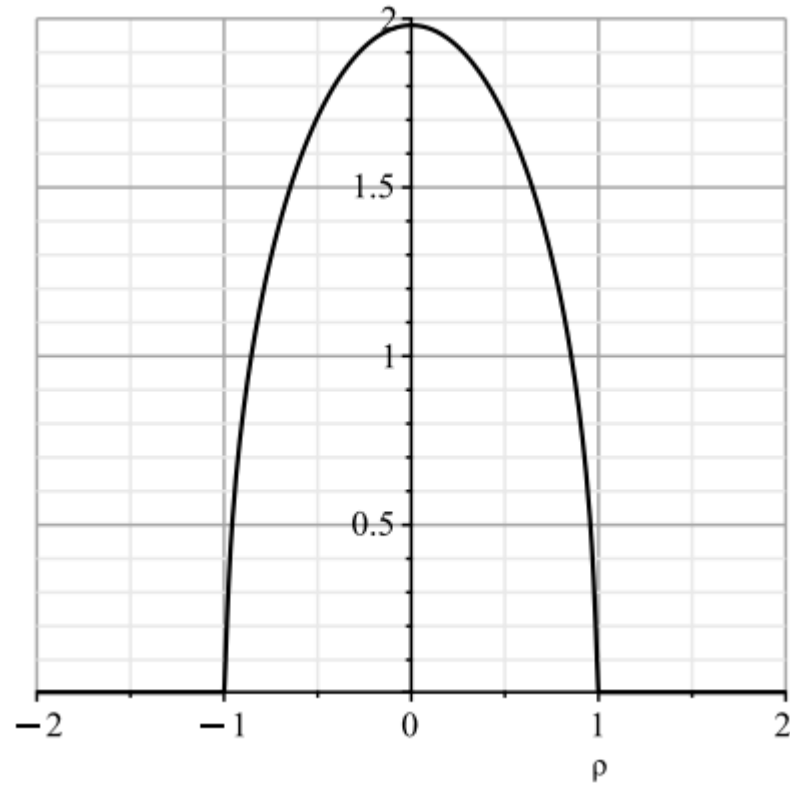


`densityplot(Rf3(ρ , φ), $\rho = -2..2$, $\varphi = 0..\pi$,
colorscheme = ["white", "black"])`

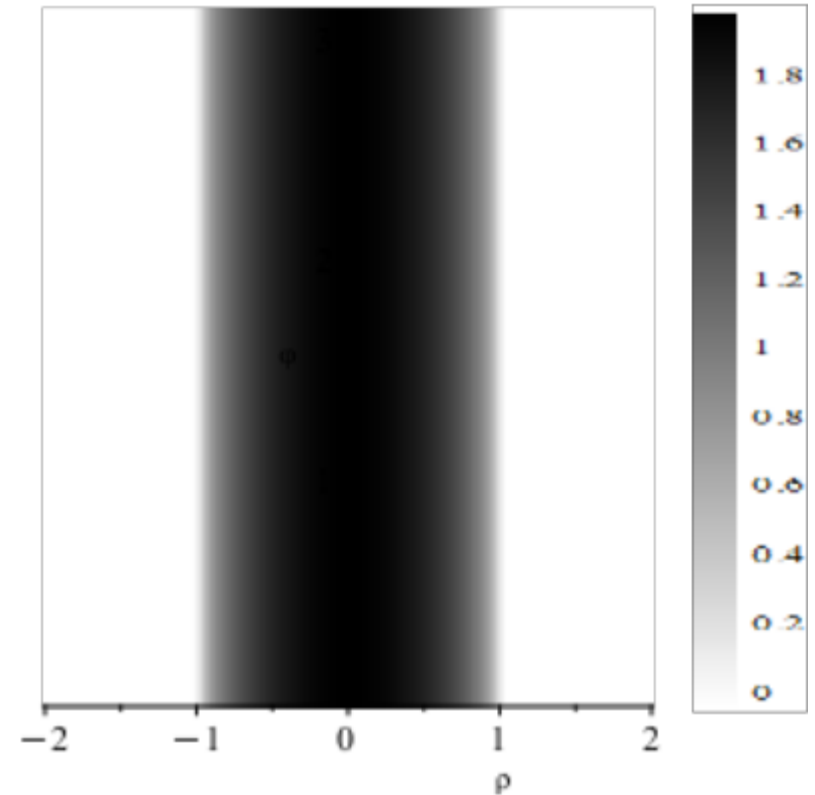


En generaliseret kegle

- $a=100$



```
densityplot( $Rf_{100}(\rho, \varphi)$ ,  $\rho = -2..2$ ,  $\varphi = 0..\pi$ ,  
           colorscheme = ["white", "black"])
```



Minder om cirklen!

Gaussisk klokke

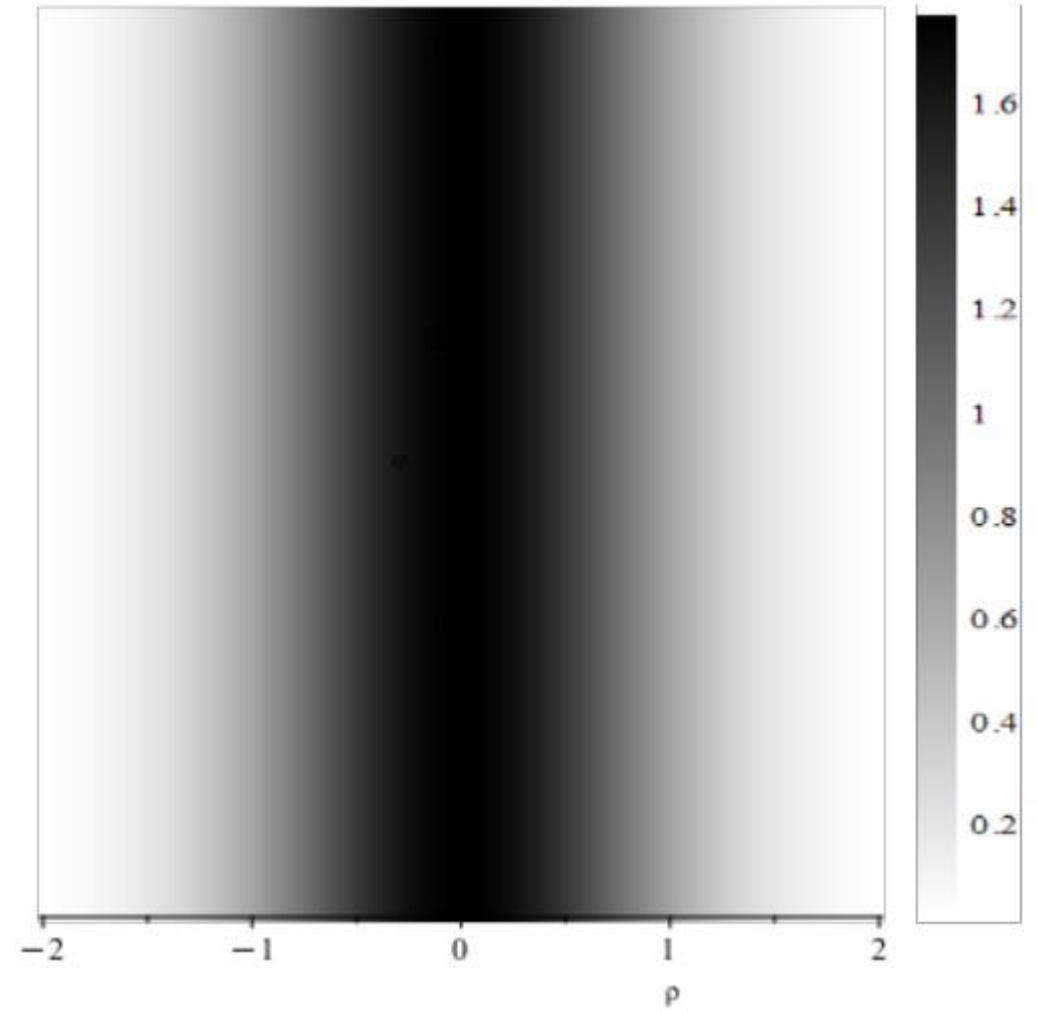
<https://steen-toft.dk/mat/ct/gaussian.pdf>

$$f(x, y) := e^{-x^2 - y^2}$$

Uafhængig af vinklen!

$$\begin{aligned} Rf_{\text{gauss}}(\rho, \varphi) &= Rf(\rho, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho \cdot \cos(0) - t \cdot \sin(0), \rho \cdot \sin(0) + t \cdot \cos(0)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, t) dt = e^{-\rho^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$Rf_{\text{gauss}}(\rho, \varphi) := \sqrt{\pi} \cdot e^{-\rho^2}$$



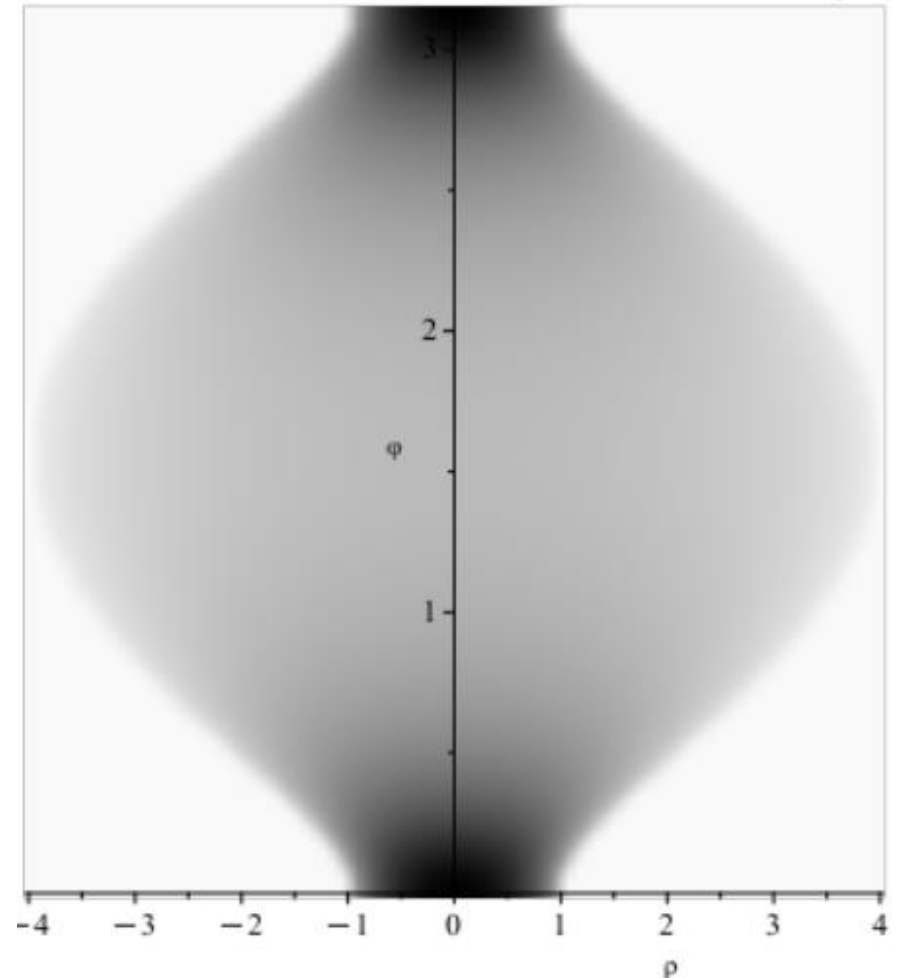
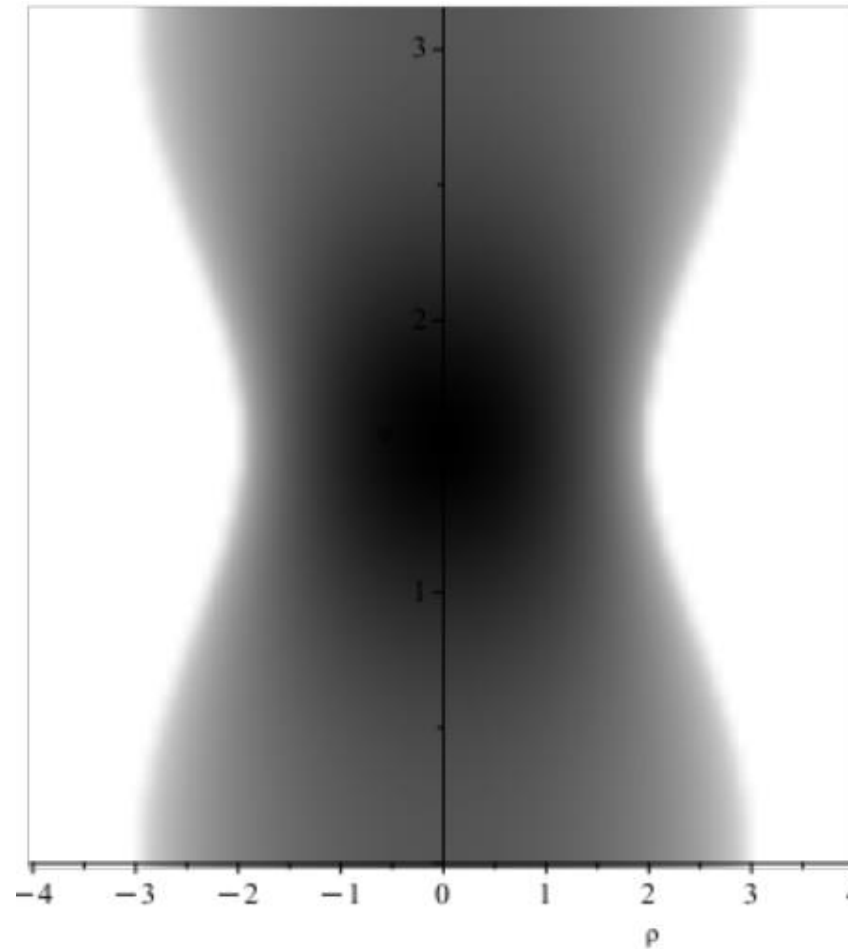
Ellipser

- <https://steen-toft.dk/mat/ct/ellipse.pdf>

- Halvakser
3 og 2

- Halvakser
1 og 4

- *Centrum i origo*



Shepp-Logan phantom

- Udgangspunktet er 10 ellipser i forskellig størrelse og orientering samt kontrast!



A	a	b	x_0	y_0	ϕ
1.0	0.69	0.92	0.0	0.0	0^0
-0.8	0.6624	0.874	0.0	-0.0184	0^0
-0.2	0.11	0.31	0.22	0.0	-18^0
-0.2	0.16	0.41	-0.22	0.0	18^0
0.1	0.21	0.25	0.0	0.35	0^0
0.1	0.046	0.046	0.0	0.1	0^0
0.1	0.046	0.046	0.0	-0.1	0^0
0.1	0.046	0.023	-0.08	-0.605	0^0
0.1	0.023	0.023	0.0	-0.606	0^0
0.1	0.023	0.046	0.06	-0.605	0^0

Table B.1 Parameter settings for the Shepp Logan Phantom.

Shepp-Logan phantom

- <https://steen-toft.dk/mat/ct/phantom.pdf>
- Kilde (PhD-afhandling, Peter Toft, DTU 1996):
<https://backend.orbit.dtu.dk/ws/portalfiles/portal/5529668/Binder1.pdf>
- Generelle formler i appendix B.

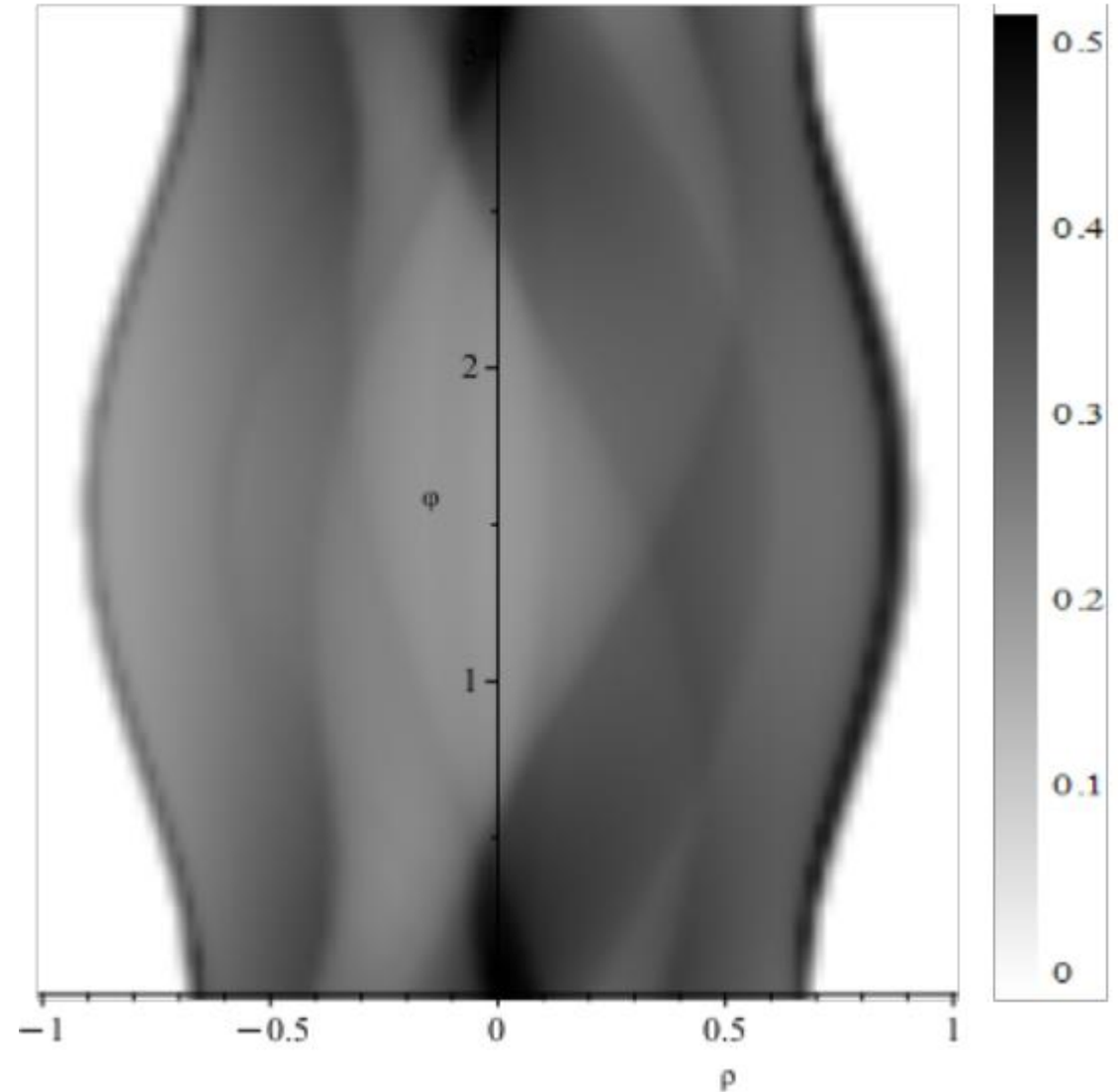
If the ellipse is called $g_{A,a,b,\phi,x_0,y_0}(x,y)$, then the Radon transform is given by

$$\check{g}_{A,a,b,\phi,x_0,y_0}(\rho,\theta) = \begin{cases} 2Aab \frac{\sqrt{\rho_0^2 - (\rho - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta)^2}}{\rho_0^2} & \text{if } |\rho - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta| < \rho_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

$$\rho_0^2 = a^2 \cos^2(\theta - \phi) + b^2 \sin^2(\theta - \phi) \quad (\text{B.31})$$

Shepp-Logan phantom

```
 $Rf_{phantom}(\rho, \varphi) :=$   
 $Rf_{ellipse}(1.0, 0.69, 0.92, 0.0, 0.0, 0, \rho, \varphi) +$   
 $Rf_{ellipse}(-0.8, 0.6624, 0.874, 0.0, -0.0184, 0, \rho, \varphi) +$   
 $Rf_{ellipse}\left(-0.2, 0.11, 0.31, 0.22, 0.0, -\frac{18}{180} \cdot \pi, \rho, \varphi\right) +$   
 $Rf_{ellipse}\left(-0.2, 0.16, 0.41, -0.22, 0.0, \frac{18}{180} \cdot \pi, \rho, \varphi\right) +$   
 $Rf_{ellipse}(0.1, 0.21, 0.25, 0.0, 0.35, 0, \rho, \varphi) +$   
 $Rf_{ellipse}(0.1, 0.046, 0.046, 0.0, 0.1, 0, \rho, \varphi) +$   
 $Rf_{ellipse}(0.1, 0.046, 0.046, 0.0, -0.1, 0, \rho, \varphi) +$   
 $Rf_{ellipse}(0.1, 0.046, 0.023, -0.08, -0.605, 0, \rho, \varphi) +$   
 $Rf_{ellipse}(0.1, 0.023, 0.023, 0.0, -0.605, 0, \rho, \varphi) +$   
 $Rf_{ellipse}(0.1, 0.023, 0.046, 0.06, -0.605, 0, \rho, \varphi) :$   
  
 $densityplot(Rf_{phantom}(\rho, \varphi), \rho = -1 .. 1, \varphi = 0 .. \pi, colorscheme = ["white", "black"])$ 
```



Links til hjemmesider med materialer

- **Min hjemmeside** (steen-toft.dk):

- Projekt CT (Computer Tomografi), Mat1b, E24, DTU (*hjælp og links*):
<https://steen-toft.dk/mat/dtu/20232024/F24/ct.htm>
- CT-scanning: Radon-transformeret og sinogrammer (*Steens videre arbejde*):
<https://steen-toft.dk/mat/ct/>

- **DTU-links** (SRP hjælp):

- Tomografi - Hvordan vi ser det skjulte (V3): <https://ct-srp.compute.dtu.dk/v3/>
- Tomografikogebogen (V3): <https://ct-srp.compute.dtu.dk/v3/files/Tomografikogebogen.pdf>
- Tomografi - Hvordan vi ser det skjulte (V1): <https://ct-srp.compute.dtu.dk/v1/index.php>

Tak for i dag!

