Planeter og satellitter

Bevægelsen af planeterne omkring solen er givet ved samme fysiske formler som satellitters bevægelse omkring jorden.

Massetiltrækning:

Massetiltrækningskraften kaldes også gravitationskraft eller tyngdekraft: $\boxed{F_t = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}$

hvor M og m er masserne af de 2 legemer (sol/jord eller jord/satellit), r er afstanden mellem massemidtpunkterne (centrene) af legemerne.

Formlen $F_t = m \cdot g$ gælder kun for mindre genstande tæt på jordens overflade. Når vi taler om satellitter eller planeter, så skal den indrammede generelle formel anvendes.

Gravitationskonstanten $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ er en universalkonstant, dvs. den gælder overalt.

En mindre genstand, som befinder sig i nærheden af en større tildeles en såkaldt **potentiel energi** i tyngdefeltet: $\boxed{E_{pot} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}$

Bemærk at den potentielle energi er 0 uendelig langt væk, og ellers negativ.

En genstand, som bevæger sig har den **kinetiske energi**: $\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$

Cirkelbevægelse:

Bevægelse i en cirkel med konstant fart kaldes en "jævn cirkelbevægelse".
Denne kan beskrives med nogle simple formler:

Farten $\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}$ hvor r er radius i bevægelsen, v er farten, T er omløbstiden.

Centripetalkraften er den kraft, som er nødvendig for at fastholde genstanden i cirkelbevægelsen. Er der ingen centripetalkraft, så fortsætter genstanden ud ad tangenten.

Centripetalkraften $\boxed{F_c = m \cdot \frac{v^2}{r}}$ hvor m er massen af genstanden.

Beregninger:

Ud fra ovenstående grundlæggende formler kan vi udlede en hel del:

Bestemme undvigehastigheden af en raket.

Dvs. den fart, som raketten skal op på for at slippe langt væk fra jorden.

Bestemme højden af den geostationære bane for satellitter,

som skal stå på en fast position over ækvator.

Bestemme fart og omløbstid af en satellit, som bevæger sig 300 km over jordens overflade.

Det kunne være en vejrsatellit, spionsatellit, GPS-satellit osv.

Udlede Keplers 3. lov.

Den siger, at $\frac{R^3}{T^2} = \text{konstant}$ for alle planeter i solsystemet.

Bestemme undvigehastigheden af en raket.

Dvs. den fart, som raketten skal op på for at slippe langt væk fra jorden.

Raketten kan netop slippe væk, når den samlige mekaniske energi er nul.
Ude i det fjerne er nemlig den potentielle energi nul.

$$E_{mek} = E_{pot} + E_{kin} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -G \cdot \frac{M_{jord} \cdot m}{R_{jord}} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot \frac{M_{jord} \cdot \cancel{m}}{R_{jord}} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$v^2 = \frac{2G \cdot M_{jord}}{R_{jord}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{v = \sqrt{\frac{2G \cdot M_{jord}}{R_{jord}}}}}$$

Bemærk at satellittens masse udgår!

Tallet kan beregnes, når vi indsætter disse værdier: $R_{jord} = 6378\,km$ og $M_{jord} = 5,796 \cdot 10^{24}\,kg$

$$v = \sqrt{\frac{2G \cdot M_{jord}}{R_{jord}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right) \cdot \left(5,796 \cdot 10^{24}\,kg\right)}{6,378 \cdot 10^6\,m}} = 11010,3 \frac{m}{s} \simeq \underline{\underline{11 \frac{km}{s}}}$$

Bestemme højden af den geostationære bane for satellitter,

som skal stå på en fast position over ækvator.

Satellitten foretager i så fald en jævn cirkelbevægelse, hvor centripetalkraften er givet ved jordens tiltrækning, og hvor omløbstiden T er 24 timer:

$$F_t = F_c \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot \frac{M_{jord} \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot \frac{M_{jord} \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot \frac{M_{jord}}{r} = v^2$$

hvor r er afstanden fra jordens centrum til satellitten. Bemærk at satellittens masse udgår!

Indsætter nu $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ og regner videre:

$$G \cdot \frac{M_{jord}}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot \frac{M_{jord}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot M_{jord} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{T^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$r^3 = \frac{G \cdot M_{jord} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_{jord} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}}}$$

Indsætter igen værdier og beregner:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_{jord} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right) \cdot \left(5,796 \cdot 10^{24}\,kg\right) \cdot \left(24 \cdot 60 \cdot 60 s\right)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4,18126 \cdot 10^7\,m$$

Så afstanden fra jordens centrum er $41812,6\,km$.

Afstanden over jordens overflade er så $41812,6\,km - 6378\,km = 35434,6\,km$. Dvs. ca. <u>36.000 km</u>

***Bestemme fart og omløbstid af en satellit, som bevæger sig 300 km over jordens overflade*.**
Det kunne være en vejrsatellit, spionsatellit, GPS-satellit osv.

Tager den 3. sidste formel ovenfor, og bestemmer i stedet for T, idet r nu er kendt:

$$G \cdot M_{jord} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{T^2} \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_{jord}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_{jord}}}}}$$

Indsætter værdier og beregner:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_{jord}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(6,378 \cdot 10^6 m + 3,00 \cdot 10^5 m\right)^3}{\left(6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right) \cdot \left(5,796 \cdot 10^{24} kg\right)}} = 5514,71 s = \underline{\underline{91,9118 \min}}$$

Altså en omløbstid på lidt mere end halvanden time!

Satellittens *hastighed* kan beregnes:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot \left(6,378 \cdot 10^6 m + 3,00 \cdot 10^5 m\right)}{5514,71 s} = 7608,58 \frac{m}{s} \simeq \underline{\underline{7,6 \frac{km}{s}}}$$

Der skal altså fart på for ikke at falde ned på jorden!

***Udlede Keplers 3. lov*.**

Den siger, at $\frac{R^3}{T^2} = \text{konstant}$ for alle planeter i solsystemet.

Nu drejer bevægelsen sig omkring solen.

Formlen $G \cdot M_{jord} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{T^2}$ ovenfor erstattes af $G \cdot M_{sol} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{T^2}$, og r er nu afstanden i banen omkring solen.

$$G \cdot M_{sol} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{T^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{G \cdot M_{sol}}{4 \cdot \pi^2} = \frac{r^3}{T^2}$$

Da udtrykket for $\frac{r^3}{T^2}$ ikke afhænger af planeten masse, men kun af solens masse, så er udtrykket konstant i vores solsystem.

Jo længere væk en planet er fra solen, jo længere tid tager omløbet.